目　录

一、郑玄与胡克的对话

弹性定律是材料力学、结构力学和弹性力学等固体力学的必要基础和重要内容之一。所以，我们这本小册子就从弹性定律的历史讲起。

弹性定律是英国人胡克提出来的，所以通常又叫做胡克定律。这似乎是众所周知的事情。然而，新近的研究表明，弹性定律的优先权并不属于胡克。

伽利略以对话的形式，介绍了他在天文学和力学上的一些研究成果。我们不妨也采用这种形式，通过郑玄与胡克的对话，介绍弹性定律的一些历史情况。

中国东汉经学家郑玄（公元127～200年）比胡克大1508岁，设想这两个不同时代、不同国度的古人对话，虽然是"纯属虚构"。然而，对话中列举的种种史料，则是有案可查的。

闲话休提，下面就请我们的读者来鉴别对话中的真真假假吧！

胡克：请问这位老先生尊姓大名？

郑玄：鄙人姓郑名玄，字康成。东汉顺帝永建二年（公元127年）七月初五出生于北海高密（今属山东）。

胡克：啊！您就是大名鼎鼎的经学家和教育家郑康成先生，久仰久仰。

郑玄：您贵姓呀？

胡克：我叫Robert Hooke，1635年7月18日在英国怀特岛出生。

郑玄：原来是英国大科学家胡克先生，幸会幸会。

胡克：郑老先生学问博大精深，我想请您猜个谜语，好吗？

郑玄：猜谜语是件有趣的事情，不妨试试。

胡克：在1676年拙作《关于太阳望远镜和其他仪器的说明》的末尾，我出了一个字谜："ceiiinosssttuv"。请您猜一下，这是讲哪一个力学的定律？

郑玄：非常抱歉，鄙人不懂洋文。看来谜语猜不成了。

胡克：不要紧。在1678年拙作《恢复原形的或弹簧的势能》上，我就公布了谜底："Ut tensio sic vis"。这句拉丁文的意思是：有多大的伸长，就有多大的力。也就是说，任何弹簧的力与它的伸长按同一比例增加，即力与变形成正比关系。其实，早在1660年，我通过实验就发现了这种关系。由于想得到它在应用方面的专利，所以没有及早发表。接着，在1680年，法国科学家马略特又独立地发现了这个定律。

郑玄：马略特是怎么说的？

胡克：对于试样沿长度方向受拉伸的情况，马略特写道："如果一木片伸长$\frac{1}{6}$英寸就断裂，500磅的砝码可以使它产生这样的伸长量，那么，125磅的砝码将使它伸长$\frac{1}{24}$英寸，250磅的砝码它只伸长$\frac{1}{12}$英寸，等等，这样，每一伸长量将与一定重量的砝码取得平衡。"此外，他还用这个定律来研究梁的强度问题。

郑玄：这个力学定律叫做什么定律？

胡克：叫做弹性定律。后来人们常用我的姓来命名，叫做胡克定律，并沿用至今。不过，其中曾经有一段插曲。

郑玄：什么插曲？

胡克：在我和马略特发现弹性定律之后的一个世纪里，许多欧洲大陆的作者往往把这个定律的发现仅仅归功于马略特一个人。

郑玄：啊！真有趣。不过，按您讲的以年代先后来看，这个弹性定律似应叫做郑玄定律。

胡克：什么？叫做正弦定理？您说到哪里去了。

郑玄：我讲的是以鄙人的姓名来命名，叫做郑玄定律。要不然，就取我们两个人的姓名，叫郑玄-胡克定律。

胡克：唉！为万有引力定律等问题的优先权，我跟牛顿已经闹得不可开交。没想到和郑老先生竟然也有优先权的争执，真是倒霉。①

郑玄：请您不要难过，人们是不会忘记您的贡献的。至于弹性定律该以谁的名字来命名的问题，让后人去定夺吧！

胡克：对！叫什么定律让人们去选择好了。

郑玄：数学中也有类似的情况，譬如毕达哥拉斯定理，在我国就叫做勾股定理。不过，"勾股"不是人名。

胡克：那么，可以介绍一下您有关弹性定律的大作吗？

郑玄：我没有专门撰写一篇关于弹性定律的论文。大概在您之前1500年，我在注释《考工记·弓人》中"量其力，有三均"这句话时，写了下面一段文字："假令弓力胜三石，引之中三尺，弛其弦，以绳缓擐(huàn，又读guān)之，每加物

---

① 据说胡克连一幅肖像画也没有，身后的事也不详。有的文献认为，这似乎与他跟牛顿的争执有关，以致被牛顿以后英国学术界所忽视。

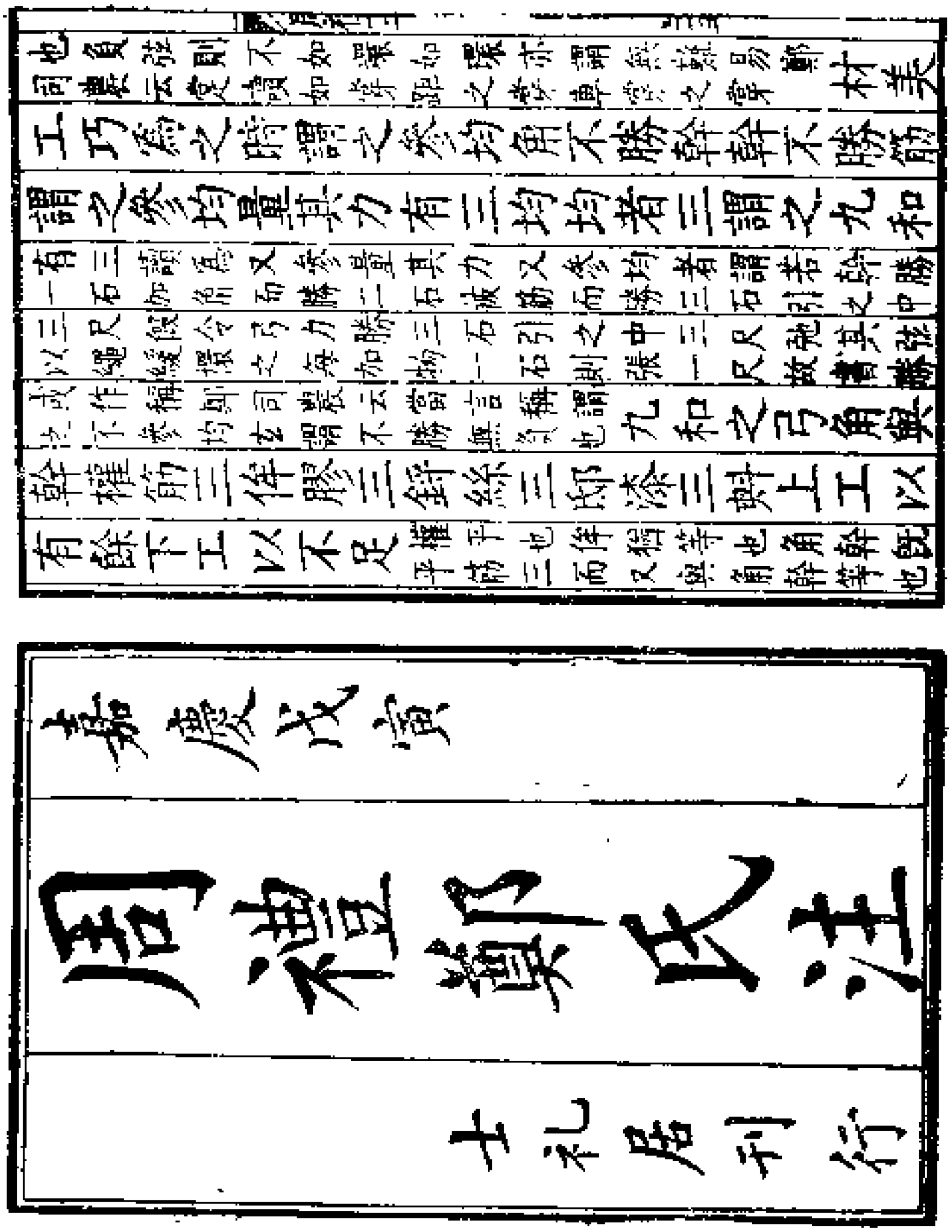

嘉慶戊寅
周禮鄭氏注
士礼居刊行
工巧爲之時謂之參均角不勝幹幹不勝筋
謂之參均量其力有三均均者三謂之九和
九和之弓角與
幹權筋三侔膠三鋝絲三邸漆三斞上工以
有餘下工以不足

图 1.1

一石，则张一尺。”请看，这里有书为证(图1.1)。①

胡克： 请问，“弛其弦，以绳缓擐之”是什么意思？

郑玄： 这是讲测量弓力时，先将弓的弦松开，另外用绳子松松地套住弓的两端，然后加重物，进行测量。

胡克： 我明白了。这样弓体就没有初始应力，处于自然状态。

郑玄： 后来，到了唐代初期，贾公彦对我的注释又作了注疏，他说：“郑又云假令弓力胜三石，引之中三尺者，此即三石力弓也。必知弓力三石者，当弛其弦、以绳缓擐之者，谓不张之，别以一条绳系两箫，乃加物一石张一尺、二石张二尺、三石张三尺。”其中“两箫”就是指弓的两端。

胡克： 郑老先生讲“每加物一石，则张一尺”，和我讲的完全是同一个意思。您比我早1500年就记录下这种正比关系，的确了不起，真是令人佩服之至！我在1686年《关于中国文字和语言的研究和推测》一文中，早就推崇过贵国的古代文化：“目前我们还只是刚刚走到这个知识领域的边缘，然而一旦对它有了充分的认识，就将会在我们面前展现出一个迄今为止只被人们神话般地加以描述的知识王国”。②

郑玄： 谢谢胡克先生对我国古代文化的赞誉。

胡克： 实际上，我对贵国的许多事情都非常缺乏了解。因此，我想请教一个问题：汉代时中国人对于弓弩的刚度(即

---

① 《考工记》原是一本独立的著作，西汉时因《周官》(后改称《周礼》)缺《冬官》篇，硬将《考工记》补入，所以郑玄的注释便写在《周礼》里面。

② 转引自李约瑟《中国科学技术史》第一卷，科学出版社、上海古籍出版社1990年版。该书的科学出版社1975年版对这段话的译文与此有些不同，现录于下，以便对照：“到目前为止，我们还只是刚刚走到这个丰富的宝藏的边缘，然而这项发掘工作一旦完成，就将会在我们面前展现出一个迄今为止只被人们神话般地加以描述的学术王国”。

拉满弓弦所需的力）是否已经有了定量的测量？

郑玄：我看到不少古籍都有这方面的记载。以流传到后世的来说，有《左传·定公八年》的"弓六钧"、《吕氏春秋·壅塞》的"三石"弓、《荀子·议兵》的"十二石之弩"、《论衡·儒增》的"十石之弩"、《论衡·效力》的"弩力五石"、《管子·轻重甲》的"十钧之弩"、《六韬·犬韬·武车士》的"八石弩"……等记载。此外，《后汉书·盖延传》和《后汉书·祭肜（róng）传》也提到盖延（？～39）和祭肜（？～73）所用的弓为"三百斤"。这不过是随便举几个例子。

胡克：除了这些古书上写的，有没有其他更加确凿的证据呢？

郑玄：当然有。例如，在今河南灵宝张湾的一座东汉墓里，埋藏有一个弩机（jī），上面刻写着"永元六年考工所造八石机"等文字。永元六年就是公元94年，所以这个埋在地下1000多年才被后人发掘出来的弩机，它的年龄要比我大。

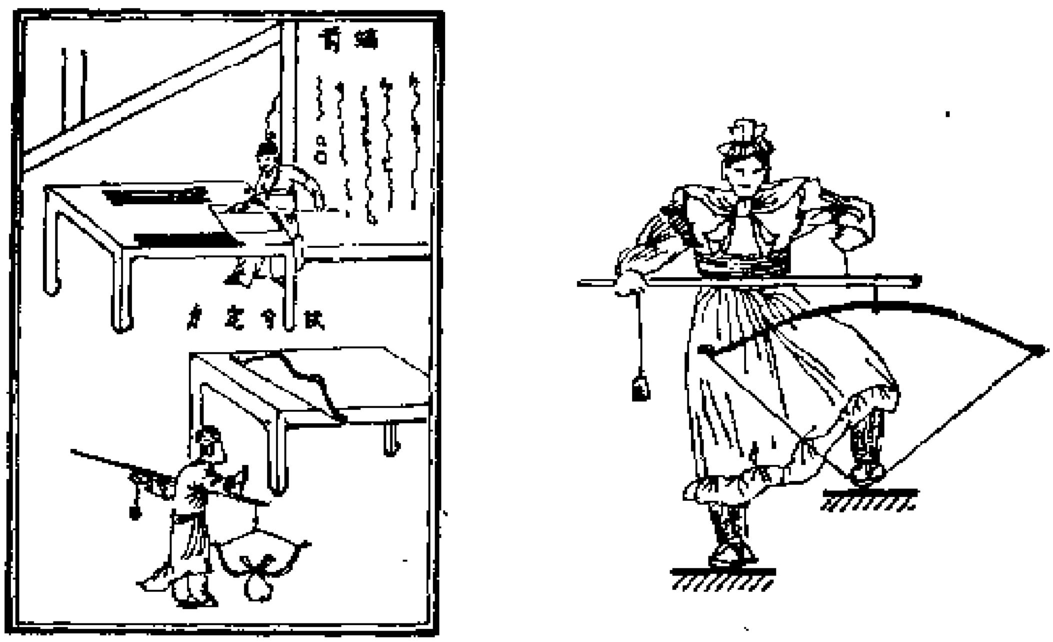
胡克：只是这么一个孤例？

郑玄：不！还有呢。例如，在今内蒙古额济纳河流域的汉代烽燧遗址里，埋藏了一批屯戍文书，后世发掘出来把它叫做"居延汉简"。在这些汉简上，记有一石弩、二石弩、三石弩、四石弩、五石弩、六石弩、七石弩、八石弩、九十石弩等字样者，按已出土的来统计，达94处之多。它们有的是说明弩的原有石数，有的是记录就地实测的结果。就地测量时有的甚至准确到斤和两，如"三石廿九斤"、"四石卌（xì，四十）二斤"、"三石卌六斤六两"，等等。有的简上同时刻着西汉的一些年号，时域相当于公元前78年至公元前11年。也就是说，这些汉简所记载的，是我出生之前的事情。

胡克：这样说来，汉代的弩不仅在制造时常在弩机上标

明是多少石的，而且在边远地区屯戍时还经常就地复核它的实际刚度。也就是说，在郑老先生之前，中国人确是经常测量弓弩的刚度，而且测量方法看来也是十分简便易行的。

郑玄：是这样。关于测量弓弩刚度的方法，除了我和贾公彦稍有提及之外，宋应星在1637年出版的《天工开物》上有比较具体的记载，这里不妨介绍一下。他在《佳兵·弧矢》中写道："凡试弓力，以足踏弦就地，秤钩搭挂弓腰，弦满之时，推移秤锤所压，则知多少。"书中还有"试弓定力"的插图（图1.2 *a*）①。



(*a*)　　　　(*b*)

图　1.2

① 另据文献[1.12]介绍，早在北宋时代，人们不仅仅已经掌握了定量测量弓体刚性的方法，而且还把定量测量的结果应用到改善弓体性能，提高弓箭射程方面。这条材料最早出现在北宋韩琦的《别录》一书中，后由南宋江少虞收录在《国朝事实类苑》卷14"德量智识"中。具体内容是："魏丕作场使，旧制床子弩止七百步，上令丕增造至千步，求规于信。信令悬弓于架，以重坠其两端，弩势圆，取所坠之物较之，但于二分中增一分，以坠新弩，则自可千步矣。如其制造，果不差。"

胡克：用秤来测量是一种巧妙的方法。插图所描绘的跟文字叙述的，在细节上有点差异（按文字改画的图，见图1.2b)①，实质上是一样的。这种利用杠杆原理测力的方法，在后世的材料试验机上也经常采用。郑老先生，我还想提一个有关阁下的问题，不知您是否介意？

郑玄：请便，不必客气。

胡克：除了研究经学和从事教育之外，您对科学技术问题也有兴趣吗？

郑玄：少年时我就好学书数。八九岁便能步算乘除。13岁那年，我对天文学又产生了兴趣，做过一些研究。后来，进一步研究了算术和历法。对于中国古代数学名著《九章算术》以及《三统历》，不客气地说，都颇为精通。既然您问起，还可以顺便谈谈我的一段有趣的经历。青壮年时，我去过今山东、山西、河南、河北、陕西等许多地方，到处拜师求学，长达十多年之久。当我拜马融先生为师时，有三年时间都没有让我见到他，只是派他的高足来教我。……

胡克：啊！这位马融先生也真够厉害的。

郑玄：您听我说。有一天，马融先生遇到浑天说（古代解释天体的一种学说）里的一个问题，可他怎么算也不合。问他身边的高足又都说不会解。有人便介绍说，郑玄擅长算术。马融先生这才召见了我，结果这个问题被我解决了。

胡克：佩服！佩服！郑老先生在科学技术上不愧是我们的先驱。作出"每加物一石，则张一尺"的记载，的确不是偶然的事情。

郑玄：不敢当。胡克先生是否可以告诉我，您是怎样通

---

① 此图是按照钱令希教授的意见而加的。

过实验发现弹性定律的？

胡克：我做了四种实验：圆柱螺旋弹簧、钟表的盘簧、金属丝拉伸和悬臂木梁。我在前面提到的论文中给出的一个图（图

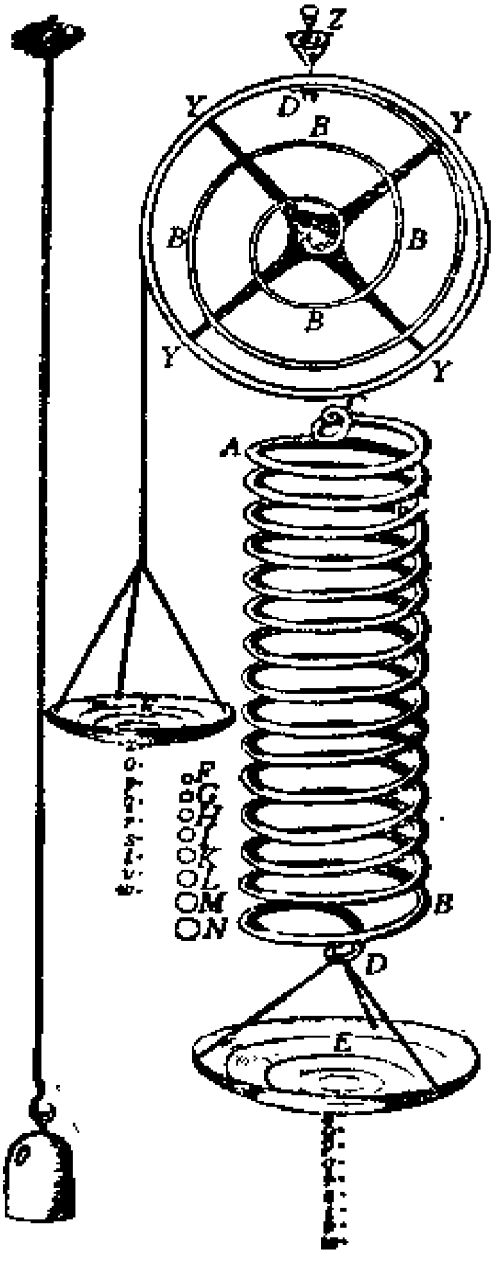


图 1.3①

1.3），表示了其中三种实验的情形。

① 此图取自文献[1.9]，与文献[1.8]的稍有不同。

郑玄：您做的实验确实不少，值得我们借鉴。请您讲具体一点，好吗？

胡克：在拙作中有这样一段话："一分力使弹簧伸长或弯曲一空间单位，二分力使它弯曲二空间单位，三分力就使它弯曲三空间单位，以此类推。"文中还有一些话比较啰嗦，……

郑玄：不要紧，愿洗耳恭听。

胡克：在简要介绍圆柱螺旋弹簧的实验装置和实验方法之后，我说，如果某一重量（1盎司，或者1磅）使弹簧伸长某一段距离$\left(\frac{1}{12}\right.$英寸，或者1英寸$\left.\right)$，则两倍的重量将使它伸长两倍的距离，三倍的重量将使它伸长三倍的距离，以此类推。

郑玄：请继续讲下去。

胡克：在说明盘簧的实验装置和实验方法之后，我又说，如果1打兰$\left(\right.$等于$\frac{1}{16}$英两$\left.\right)$的重物使它转动10度的话，那么，2打兰的重物将使它转动20度，3打兰转30度，4打兰转40度，5打兰转50度，以此类推。

郑玄：对于其他两个实验，您又讲了些什么？

胡克：在介绍金属丝受拉伸的实验情况之后，我说，各个伸长量之间的比值，与所加各次载荷之间的比值相同。对于木梁弯曲实验，我们也可以得到同样的结果。

郑玄：那么，您最后怎样作出结论？

胡克：我说，综上所述，很显然，在任何弹性体中自然的规律或定律是，把它自己恢复到自然位置的力或能力总是与它所变动的距离或空间成正比，不管它是由于被放松或是它的各部分在相互疏散，还是被收缩或是各部分在相互挤紧，

都是这样。不仅从上述物体可以看到这些，而且在所有带弹性的其他物体中，如金属、木料、石块、干土、毛发、兽角、蚕丝、骨骼、肌肉、玻璃等等，都是这样。

郑玄：您的研究比我的注释要详尽得多了，不仅做了一系列实验，而且还把实验结果概括成一个定律。

胡克：但是没过多久，就有人提出了疑问。例如，莱布尼兹在1691年写信给惠更斯，询问有关实验的情况。惠更斯在回信中透露，仅当弹簧轻微伸长时，他的实验结果才跟我讲的一致。后来人们指出，在我的论述中，对力和变形的大小都未加限制，反复地讲“以此类推”，并且普遍推广到各种材料，这表明我当时不曾注意到弹性定律的适用范围问题。的确，对于大变形或者塑性变形等各种几何非线性和材料非线性的情况，力与变形就不再是正比关系了。

郑玄：如此说来，当六七尺的弓张开到三尺时，加物的重量与弓张开的距离也不再保持正比关系。

胡克：是这样。不过，人们并不苛求于我，当然更不应该苛求于您老人家。

郑玄：无论如何，我们的论述确实存在着同样的不足之处。

胡克：是的。这可谓美中不足。

郑玄：我们先后独立地得出了弹性定律。虽然我的记载比您早了1500年，但却长期被埋没了。而您和马略特的论著则及时为人们所注意和引用，并对固体力学理论体系的建立和发展直接起了重要的作用。因此，你们的贡献是很大的。

胡克：这里边有着种种的原因。不管怎样，弹性定律的历史，应该从郑老先生讲起，从贵国讲起。如果要说“世界之最”或者“世界第一”，这就是中国的“世界之最”！中国的

"世界第一"！

参 考 文 献

[1.1] 老亮，"我国古代早就有了关于力和变形成正比关系的记载"，《力学与实践》，1(1987)。

[1.2] 老亮，"中国古代材料力学史料杂录(一)"，《力学与实践》，3(1990)。

[1.3] 《十三经注疏·周礼注疏》，中华书局，1980。

[1.4] 范晔，《后汉书》，中华书局，1956。

[1.5] 郑珍，《郑学录》，贵州省政府，1940。

[1.6] 刘义庆，《世说新语》，上海古籍出版社，1982。

[1.7] 中国社会科学院考古研究所，《居延汉简甲乙编》，中华书局，1980。

[1.8] S.P.Timoshenko, *History of Strength of Materials*, McGraw-Hill, 1953; 铁木生可，《材料力学史》，上海科学技术出版社，1961。

[1.9] J.F.Bell, *Mechanics of Solids*, Vol.I, *The Experimental Foundations of Solid Mechanics*, Springer-Verlag, 1984.

[1.10] 威·弗·马吉，《物理学原著选读》，商务印书馆，1986。

[1.11] 老亮，《中国古代材料力学史》，国防科技大学出版社，1991。

[1.12] 石云里，"关于弓体刚性测量的一条宋代史料"，《物理学史》，1，2(1991)。

二、解决一个强度问题，田单当将军

根据一些先秦古籍记载，我国的车始创于夏代。从考古发掘来说，现在能看到最古老的车是商代的。那时的"车"字，在甲骨文中有多种不同的写法。到了春秋战国，车辆的产量已相当可观。古书上常用"千乘(shèng)之国"、"万乘之国"一类的话来描写一个国家军事力量的大小。由于车辆大量使用，古籍中出现了不少关于车的种种记载。这里讲两个与力学问题有关的故事。

战国时，齐国田氏王族有一个远房亲戚，姓田名单。齐湣(mín)王时，田单不过是一个小小的官员，在齐国首都临菑负责市场管理的行政事务，并没有受到重用。

公元前 284 年，燕昭王派乐毅率兵攻打齐国。齐军节节败退，齐湣王放弃都城逃走，一直退到莒(jǔ)城。燕军长驱直入，攻下齐国许多城池。田单逃回家乡安平。

不久，燕军又攻打安平。城被攻破，齐人逃走，争先夺路，车马拥挤，互相碰撞。由于车的轴头折断，或者由于套在轴头上的铜套筒破裂，车辆毁坏，不能前进，许多齐人便当了燕军的俘虏。唯独田单和他族人的车辆完好无损，往东逃到即墨。

后来，燕军席卷了齐国大片领土，只剩下莒城和即墨没

有攻下。燕军包围莒城，几年仍未能攻破，于是调兵向东，围攻即墨。即墨的地方长官出城迎战，兵败身亡。城里的人公推田单出来领兵，他们说："安平那一仗，田单事先在车辆上采取了有效措施，所以能顺利撤退到即墨，可见他懂得兵法。"于是拥立田单为将军，坚守即墨，抵抗燕军。

公元前279年，田单施反间计，使燕国撤换了名将乐毅，并用火牛阵大败燕军，一举收复了失去的70多座城池。

那么，田单在车上采取了什么措施，使他们一族人能安然撤退到即墨呢？

原来，当时为了使车辆运行平稳，往往将轮毂(gǔ)做得很长，有的长达半米。一些古籍往往用"长毂"两个字来表示战车。为了防止轮子从车轴上脱落，在轮毂外的轴端又套上一个铜套筒。这样，车轮外面便伸出了很长一段的轮毂和轴头，因而运行时车辆之间容易在这外伸部分相互碰撞。正如孙子所说："军行患车錯之"。

田单预计到这种情况，事先采取了有效措施。他让族人将轴头锯短，并用铁箍裹住剩下的短轴头，同样可以起到铜套筒阻止轮子脱落的作用。这样一来，不仅铁箍比铜套筒具有较高的强度，而更重要的是减少了与其他车辆相撞的机会。此外，由于截短了轴头，可以减小撞击时的静弯矩。然而，动载系数则会变大。如果仅以轴头的受力而论，或许还是比长轴头略低一些，因为动载系数中的静挠度应以车轴伸出车厢外的整个长度计算(当时的车轴固定在车厢底板上，轮子转而轴不转)。

上面讲的这个故事，出自西汉著名的史学家、文学家和思想家司马迁撰写的《史记》。《东周列国志》也讲了这个故

事，但个别细节与《史记》稍有出人。①

下面我们讲另一个故事，它涉及的力学问题与田单的故事有一定联系。

春秋末期，在今山西阳泉市有个很小的国家，叫做仇(qiú)由国。晋国的权臣知伯想攻打仇由国，但是道路不通。于是他耍了个花招，铸造一个大钟，用两辆车并排起来运输，说是赠送给仇由国王的。仇由国王知道后非常高兴，赶紧挖山填沟，修筑道路，准备迎接知伯送来的大钟。

仇由国有一个大臣，姓赤章名蔓枝。在他知道这个情况后，便向国王进谏说："知伯这个人贪得无厌，不讲信义。从来都只有小国进贡大国，如今却反转过来，大国给小国送东西，这里面一定有阴谋。王上要是把道路修筑好了，知伯的军队就会随着大钟来进攻的。所以千万不能接受这个大钟。"

仇由国王没有接受这个大臣的意见，仍然加紧修筑道路，准备迎接大钟。赤章蔓枝眼看知伯的军队就要进攻，便将轮毂截短，赶快逃走。不久，仇由国就被知伯灭亡了。

---

① 《史记·田单列传》："田单者，齐诸田疏属也。湣王时，单为临菑市掾，不见知。及燕使乐毅伐破齐，齐湣王出奔，已而保莒城。燕师长驱平齐，而田单走安平，令其宗人尽断其车轴末而傅铁笼。已而燕军攻安平，城坏，齐人走，争涂，以轊(wèi，车轴头)折车败，为燕所虏，唯田单宗人以铁笼故得脱，东保即墨。燕既尽降齐城，唯独莒、即墨不下。……燕引兵东围即墨，即墨大夫出与战，败死。城中相与推田单，曰：'安平之战，田单宗人以铁笼得全，习兵。'立以为将军，以即墨距燕。……"。《东周列国志》第95回："齐之宗人有田单者，有智术，知兵。湣王不能用，仅为临淄市掾。燕王入临淄，城中之人，纷纷逃窜。田单与同宗逃难于安平，尽截去其车轴之头，略与毂平，而以铁叶裹轴，务令坚固。人皆笑之。未几，燕兵来攻安平，城破，安平人复争窜，乘车者拥挤，多因轴头相触，不能疾驱，或轴折车覆，皆为燕兵所获。惟田氏一宗，以铁笼坚固，且不碍，竟得脱，奔即墨去讫。……乐毅出兵六个月，所攻下齐地共七十余城，皆编为燕之郡县，惟莒州与即墨坚守不下。……""时即墨守臣病死，军中无主，欲择知兵者，推戴为将，而难其人。有人知田单铁笼得全之事，言其才可将，乃共拥立为将军。"

赤章蔓枝截短轮毂，目的是为了逃跑得更快。正如《考工记·车人》所说："短毂则利，长毂则安。"这样说是否违反库仑摩擦理论呢？倒不一定。因为当时的工艺水平可能不是很高的，轮毂上的孔不便加工，车轴与轮毂的接触面并不十分光滑，所以接触面积大时粗糙的地方多，长毂的摩擦系数就会比短毂的大。如果赤章蔓枝同时把车轴头也截短（这是很可能的。因为轮毂变短了，即使仍用铜套筒而不象田单那样改用铁箍，伸在毂外的轴段也是可以相应截短的。不过古籍中没有这样说明），还可以避免与别的车辆或道路两旁的树木之类相撞，同样有利于达到迅速逃跑的目的。

这个故事在《韩非子》和《吕氏春秋》中都有记载。①

参 考 文 献

[2.1] 老亮，"中国古代材料力学史料杂录(一)、(二)"，《力学与实践》，3、4(1990)。

[2.2] 老亮，"《韩非子》中的力学知识"，《岳阳大学学报》，2(1989)。

[2.3] 《史记纪传选译》，下册，上海古籍出版社，1987。

[2.4] 《白话史记》，下册，岳麓书社，1987。

[2.5] 陈奇猷，《韩非子集释》，中华书局，1958。

[2.6] 《韩非子》校注组，《韩非子校注》，江苏人民出版社，1982。

① 《韩非子·说林下》："知伯将伐仇由而道难不通，乃铸大钟遗(yí，旧读wèi，赠送)仇由之君。仇由之君大说(yuè，通"悦")，除道将内(nà，通"纳")之。赤章曼枝曰：'不可。此小之所以事大也，而今也大以来，卒必随之，不可内也。'仇由之君不听，遂内之。赤章曼枝因断毂而驱，至于齐，七月而仇由亡矣。"《吕氏春秋·权勋》："中山之国有厹繇(qiú yóu)者。智伯欲攻之而无道也，为铸大钟，方车二轨以遗之。厹繇之君将斩岸堙(yīn，堵塞)溪以迎钟。赤章蔓枝谏曰：'……夫智伯之为人也，贪而无信，必欲攻我而无道也，故为大钟，方车二轨以遗君。君因斩岸堙溪以迎钟，师必随之。'弗听。……赤章蔓枝曰：'为人臣不忠贞，罪也；忠贞不用，远身可也。'断毂而行，至卫七日而厹繇亡。"

[2.7] 陈奇猷，《吕氏春秋校释》，学林出版社，1984。
[2.8] 老亮，《中国古代材料力学史》，国防科技大学出版社，1991。
[2.9] 冯梦龙、蔡元放，《东周列国志》，人民文学出版社，1955。

三、游说之士与建筑工匠的争论

古籍中有"天生五材，民并用之"的话。那么，我国古代常用的是哪五种材料呢？一般认为，"五材"指的是金、木、水、火、土。也有的认为，"百工"制造器物的"五材"是金、木、皮、玉、土。的确，金属、竹木、土石、皮革等都是古代广泛使用的材料。从古籍记载、古代建筑和出土文物中，可以看到先民在材料性能的认识和材料的合理利用上，积累了许多宝贵的经验。这里先讲一个关于木材使用的有趣故事。

战国时，赵国有一个"游说(shui)之士"，姓高阳名魋(tuí)。因为他进说赵孝成王，被任为上卿，所以又号称虞卿。有一天，高阳先生想盖房子，便找来一位建筑工匠。下面是他们讨论盖房子问题时的一段对话。

高阳：大师傅，我想请你盖一栋房子。这里木料都准备好了。

工匠：现在还不能盖。因为你的木料是刚刚从树林里砍伐来的，未经过风干。用这样的生木料盖房子，譬如作栋梁吧，由于屋顶铺的草泥又湿又重，压下来就会使生湿的木梁弯曲得特别厉害。虽然房子免强盖起来了，日后恐怕是会倒塌的。

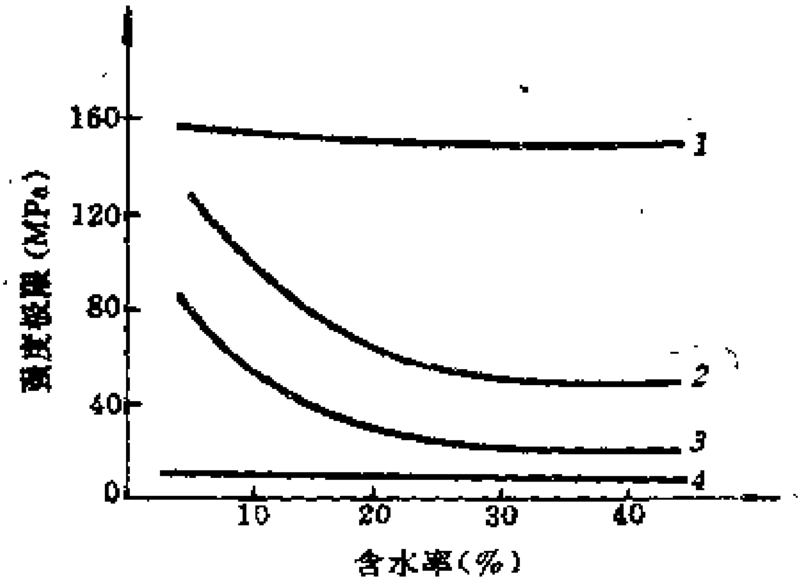
高阳：依我的看法，房屋是不会倒塌的。因为房子盖好之后，木材和草泥都会慢慢变干的。显然，木材干了，它的

性质就变得更加强劲；而草泥变干，载荷不就减轻了吗！用更加强劲的栋梁来承担变轻了的草泥，不是比房子刚盖好时的情况要好得多吗？怎么还会塌下来呢？

工匠：……（一时想不出什么话来。）

看了这段对话之后，请读者想想：是高阳先生讲的有道理，还是建筑工匠讲的有道理呢？

为了便于回答这个问题，我们来看看木材的强度和刚度与含水率的关系。实验表明，生湿的木材变干，即含水率降低，它的强度和刚度一般是会相应提高的。图 3.1 形象地表示了木材强度与含水率的关系。也有的书给出如下的概略数字：含水率每降低1％，木材的抗弯强度提高5％，弯曲弹性模量提高2％，抗压强度提高 6％，抗剪强度提高 3％，抗拉强度提高1％。



1——顺纹受拉；2——弯曲；
3——顺纹受压；4——顺纹受剪

图 3.1

由此可见，用又生又湿的木料做栋梁，它的挠度要比干

木做的大许多。所以建筑工匠讲，用生木做栋梁会弯曲得特别厉害。这与现代木材试验结果是完全符合的。

游说之士也不是没有道理，他讲木料变干后更加强劲，无论从强度还是从刚度来看，同样与现代木材试验结果相符合。至于草泥变干后载荷减轻，更是不言而喻的。

到这里，读者大概已经看出，这个故事没有讲完。是的，不过剩下的结尾很简单：建筑工匠说不过高阳先生，于是遵照这位"游说之士"的意见把房子盖起来了。当初，这栋房屋的确十分雄伟。可是，经过若干时日，房子果然倒塌了。

这个故事，在《韩非子》、《吕氏春秋》和《淮南子》等古籍中都有记载。①

既然建筑工匠和游说之士各有道理，那么，这个故事的结局是否合理呢？

原来，上面介绍干木比湿木强度大的试验结果，是指用适当方法进行干燥的木材而言。若木材在工作状态下干燥，即在负载和受约束的条件下干燥，就会出现裂纹，从而大大削弱它的强度。其次，湿木的蠕变会比干木大。再说，木材变干后，榫(sǔn)卯联接会出现松动，房屋的构架就变得不

---

① 《韩非子·外储说左上》："虞庆将为屋，匠人曰：'材生而涂濡。夫材生则挠，涂濡则重，以挠任重，今虽成，久必坏。'虞庆曰：'材干则直，涂干则轻。今诚得干，日以轻直，虽久，必不坏。'匠人诎，作之成，有间，屋果坏。"《吕氏春秋·别类》："高阳应将为室家，匠对曰：'未可也。木尚生，加涂其上，必将挠。以生为室，今虽善，后将必败。'高阳应曰：'缘子之言，则室不败也。木益枯则劲，涂益干则轻，以益劲任益轻则不败。'匠人无辞而对，受令而为之。室之始成也善，其后果败。"《淮南子·人间训》："高阳魋将为室，问匠人，匠人对曰，'未可也。木尚生，加涂其上，必将挠。以生材任重涂，今虽成，后必败。'高阳魋曰，'不然。夫木枯则益劲，涂干则益轻。以劲材任轻涂，今虽恶，后必善。'匠人穷于辞，无以对，受令而为室。其始成，竘(qǔ，雄壮貌)然善也，而后果败。"

那么结实了。此外，湿木盖房也易于腐朽和蛀蚀。这些大概就是后来房屋倒塌的原因吧！

总的说来，建筑工匠比游说之士还是高出一筹。可惜他虽有宝贵的经验，但未能道出其中的缘由，因而抵制不住高阳先生的错误，结果只好以房屋倒塌而告终。

参 考 文 献

[3.1] 老亮，“中国古代材料力学史料杂录(二)”，《力学与实践》，4(1990)。

[3.2] 老亮，“《韩非子》中的力学知识”，《辰阳大学学报》，2(1989)。

[3.3] 陈奇猷，《韩非子集释》，中华书局，1958。

[3.4] 《韩非子》校注组，《韩非子校注》，江苏人民出版社，1982。

[3.5] 陈奇猷，《吕氏春秋校释》，学林出版社，1984。

[3.6] 戴念祖，《中国力学史》，河北教育出版社，1988。

[3.7] 《建筑材料》编写组，《建筑材料》(第二版)，中国建筑工业出版社，1985。

[3.8] 王朝亨、闵维民等，《简明建筑材料学》，上海科学技术出版社，1987。

[3.9] 老亮，《中国古代材料力学史》，国防科技大学出版社，1991。

四、国际历史土木工程里程碑

古话说："天生五材，民并用之"。"五材"之中，石料是古今常用的一种材料。这里先介绍古代开凿岩石的一些巧妙方法，然后举出合理利用石料的一个范例。

人们常用"坚如磐石"、"固如磐石"、"安如磐石"之类的话来形容事物是牢不可破的。由此可见，巨大的岩石的确不易凿开。然而，古代能遗留下来的一些建筑物，往往是用岩石建造的。那么，古人有什么开凿岩石的巧妙方法呢？

古埃及人在开采象方尖碑那样的大块石料时，先在岩石表面按所需轮廓凿出沟槽，沿着沟槽打深孔，然后将木楔打入孔里，并向木楔灌水，使之浸在水中膨胀，直到岩石裂开。我国石器时代，先民加工木板的方法与此类似，即沿着拟断线每隔一定距离加入石楔，直至把原木劈开为止。六七千年前浙江余姚河姆渡遗址的木构建筑，就是利用这种方法加工木料而建造起来的。

从古籍记载和古代遗址可知，我国先民开凿岩石还有另一种方法，这就是利用热应力的所谓火烧水激法。据《华阳国志·蜀志》记载，战国时秦蜀守李冰在今四川宜宾清除滩险的一次施工中，"其崖崭峻不可凿，乃积薪烧之，故其处悬崖有赤白五色。"《华阳国志》的记载过于简略，未提及淋水的工序。《后汉书·虞诩(xǔ)传》注引《续汉书》关于东汉武都太

守虞诩的记载，就比较具体："下辩（东汉县名，在今甘肃成县西）东三十余里有峡，中当泉水，生大石，障塞水流，每至春夏，辄溢没秋稼，坏败营郭。诩乃使人烧石，以水灌之，石皆坼(chè)裂（裂开），因镌(juān，凿，削)去石，遂无泛溺之患。"又据《明史·河渠志》记载，山东副巡抚使王献在开凿河道时也运用了类似的方法："其初土石相半，下则皆石，又下石顽如铁。焚以烈火，用水沃之，石烂化为烬。"

这种开凿岩石的方法，并不限于水利工程上应用。在广东南海县西樵山新石器时代遗址的一些洞穴壁上，到处遗留有火烧和剥离石块的人工痕迹，有的洞内还堆积着石片碎屑、炭屑、灰烬和烧石等。由此推测，当时为了开采石料，可能同样利用烧热岩石然后浇水骤冷的方法，使岩石崩裂，以便撬下来运走。此外，这种方法也曾用于一些金矿的开采。

火烧水激法是利用热应力使岩石开裂的。因为用火慢慢烧热岩石之后，浇水骤冷时表面的收缩比内部的收缩来得快，于是表面的收缩遇到内部的阻碍，从而受到拉应力作用。由于岩石抗拉强度低，所以在表面处被拉开。

作为合理利用石料的一个典型例子，下面谈谈举世闻名的赵州桥（图4.1）。

赵州桥位于河北赵县，横跨洨(xiáo)河，原名安济桥，俗称大石桥，建于公元600年前后，是由隋代李春率领石工李通等建造的。桥的全长50.82米，主孔净跨37.02米，拱矢净高7.23米。它是我国现存最古老的桥梁。1300多年来，赵州桥经受过许多次洪水、地震和大小战争的考验。到1955年修缮前，仍在通行载重汽车。

提起赵州桥，人们并不陌生。小学课本里有赵州桥一课，电视节目《神州风采》展示过它的雄姿。读者或许听过"赵州桥



图 4.1

鲁班修，张果老骑驴桥上走，柴荣推车轧出一道沟"之类的神话和传说，看过描绘赵州桥的美妙诗歌和图片。在这里，我们着重从力学的角度谈谈赵州桥的一些技术成就。

我们知道，岩石的抗压强度比抗拉强度高得多，表4.1中的一些数据明显地表示出岩石抗力性能的这种特点。石拱桥正好发挥了岩石这一特性。试以石拱桥与石梁桥相比较，便很容易看出石拱桥的优点。矩形梁的横截面上受到弯矩和剪力作用，与弯矩有关的最大拉应力和最大压应力绝对值相等，因而岩石容易被拉坏。拱的横截面上除了弯矩和剪力外，一般还有轴向压力，这样就可以减小最大拉应力的数值，因而拱桥不容易破坏。宋应星似乎也体会到这一点，他在1637年出版的《天工开物》中谈到刀砖(即扇形砖）时写道："圆鞠小桥梁与圭门与窀穸(zhūn xī)墓穴者，曰刀砖，又曰鞠砖。凡刀砖削狭一偏面，相靠挤紧，上砌成圆，车马践压，不能损陷。"文中"鞠"字是弯曲的意思，"窀穸"即是墓穴。

表 4.1

岩石种类	抗压强度 σ_c(MPa)	抗拉强度 σ_b(MPa)	$\frac{\sigma_c}{\sigma_b}$
石英岩	461	28	16.5
花岗岩	229	21	10.9
辉绿岩	486	40	12.2
砂　岩	50	3.6	13.9
大理岩	90	6.9	13.0
粗面岩	150	13.7	10.9
石英岩	193	20.7	9.3

就现有的资料来说，拱桥并不是最先在中国出现的。但敞肩圆弧拱桥却是中国首创的优秀桥型，其杰出代表就是赵州桥。在欧洲，14世纪在法国建造的赛兰特桥似乎也属敞肩圆拱桥，实际上它下面的大拱仍接近半圆弧形，与赵州桥显然不同。所以说，在西方迟至19世纪才出现真正的敞肩圆拱桥，比中国晚了1000多年。

那么，敞肩圆弧拱桥有什么特点呢？敞肩式即空腹式，就是说，拱上建筑不是实腹而是空腹，以一系列小拱垒架在大拱之上。这样可以减轻桥的自重，使拱券厚度和墩台的尺寸相应减小，从而节省用料。同时又可以增大泄洪能力，减小河水对桥的侧压力。赵州桥两端各附有两个小拱，使净重减轻15.3%，排水面积增加16.5%，节省石料数百吨，安全度提高11.4%。

所谓圆弧拱，即是采用了小于半圆的弧段作为拱桥的承重结构。这比半圆拱跨度大而又高度低，既便于陆路交通，又在受力上更为合理，同时显得轻巧美观。赵州桥不仅是世界上现存最早的敞肩圆弧拱桥，而且曾经长期保持过一些世界纪录和国内纪录。例如，在赛兰特桥以前，赵州桥是世界上

净跨最大的石拱桥（这个纪录在国内保持到 1959 年湖南黄虎港大桥建成为止）；赵州桥的拱矢高度与跨度之比为1:5.12，是一座很扁的圆弧拱桥，到16世纪60年代佛罗伦萨的圣三一桥（即圣特里尼塔桥）建成以前，赵州桥是世界上矢跨比最小的石拱桥。

用结构力学中弹性拱的原理对赵州桥进行核算可知，由于在拱肩上总共附有四个小拱和采用尺寸适宜的拱顶薄填石，造成拱圈各个横截面上均受到压应力或极小的拉应力，充分发挥了石料抗压能力远大于抗拉能力的特点，符合现代拱桥设计的原则。

近年对赵州桥的桥台和桥基进行了钻探勘查，发现桥台下的地基并不是承载能力较好的中粗砂，而是轻亚黏土，并且基础没有用桩来加固。用现代计算方法进行验算，得知其基底上的压应力在0.30～0.43MPa 的范围，与轻亚黏土的许用应力相接近。仅凭经验确定的基础尺寸，竟能如此充分利用基础的承载能力，这是非常不容易的事情，实在令人叹为观止。

1991 年，赵州桥被美国土木工程师学会选定为第 12 个“国际历史土木工程里程碑”。在此之前被选定的有伦敦铁桥、巴黎埃菲尔铁塔、巴拿马运河等。

参 考 文 献

[4.1] 中国社会科学院考古研究所，《新中国的考古发现和研究》，文物出版社，1984。

[4.2] 茅以升 《中国古桥技术史》，北京出版社，1986。

[4.3] 潘洪萱，《中国的古名桥》，上海文化出版社，1985。

[4.4] 《桥梁史话》编写组，《桥梁史话》，上海科学技术出版社，1979。

[4.5] 老亮，《中国古代材料力学史》，国防科技大学出版社，1991。

五、双色剑与猴子甲

"五材"之中，金属也是古今常用的材料之一。我国古代对于金属性能的认识和利用方面的生动事例，不胜枚举。这里仅介绍古代金属兵器中的两个例子：攻击用的剑和防御用的铠甲。

在《吕氏春秋》中，写了如下关于青铜剑的一段有趣的对话。①

鉴定宝剑者：白色的青铜是坚硬的，黄色的青铜是柔韧的。用这两种青铜合铸的剑既坚硬又柔韧，是一种良剑啊！

反驳者：白色的青铜不柔韧，黄色的青铜不坚硬，用这两种青铜合铸的剑既不坚硬又不柔韧。而且柔韧的剑容易卷口，坚硬的剑容易折断。既易卷口又易折断的剑，怎么能说是利剑呢？

为了判断这两个人谁是谁非，我们来看看一些出土文物。春秋战国时有一些青铜剑的刃部和脊部颜色不同。我们知道，随着含锡量的增加，锡青铜的颜色由红色变为橙黄色再变成灰白色。经化验表明，这种"双色剑"的刃部含锡量比脊部含锡量要高，几把"双色剑"的成分如表5.1所示。

现代试验表明，锡青铜的含锡量越大，其硬度值随之提

---

① 《吕氏春秋·别类》："相剑者曰，'白所以为坚也，黄所以为牣（通"韧"）也，黄白杂则坚且牣，良剑也。'难者曰，'白所以为不牣也，黄所以为不坚也，黄白杂则不坚且不牣也。又柔则锩（juǎn，刃口卷曲），坚则折，剑折且锩，焉得为利剑？'"

高，但延伸率则下降，如表5.2所示。

表 5.1

编号	铜(%)		锡(%)		铅(%)	
	刃	脊	刃	脊	刃	脊
1	80.33	84.58	17.73	11.79	0.25	2.13
2	79.13	87.03	19.35	11.22	0.19	<0.1
3	82.79	88.27	17.21	11.73	痕量	痕量

表 5.2

含锡量(%)	抗拉强度(MPa)	延伸率(%)	布氏硬度(HB)
5	226	18	50
10	275	10	60
15	294	3	85
20	294	1～2	150
25	196	<1	280
30	118	测不出	420

由此可见，“双色剑”刃部含锡量较高，硬度较大，因而是锋利的；脊部含锡量较低，延伸率较大，因而韧性好，不容易折断。刃部和脊部坚柔配合得当，既锋利又不易折断，的确是良剑。所以《吕氏春秋》所写的对话中，鉴定宝剑者讲的有道理。反驳者离开“双色剑”的实际结构情况，抽象地发表议论，因而是不对的。

下面我们转到北宋沈括(他被李约瑟称为“中国整部科学史中最卓越的人物”)讲的一个关于铠甲的有趣故事。

位于今青海西宁市一带，古代有一个少数民族叫做羌族。这里的羌族人善于锻造铁铠甲的甲片。铁甲片是青黑色的，

非常光洁透亮，甚至可以照得见头发丝。羌族人用麝皮制成带子，把甲片一片一片地穿扎起来。铠甲并不厚，既柔软又坚硬，这种甲片有一个古怪的名字，叫做“瘊子甲”

北宋时，在今甘肃、宁夏一带地区担任军事长官的韩琦，曾将当地作为宝贝收藏在柜子里的一副“瘊子甲”拿出来，进行了“打靶”试验。在相隔50步远的地方，用强弩放箭射它，却射不进去。其中有一支箭似乎射穿了甲片，其实是凑巧射中了甲片上用来穿带子的孔洞，但这个铁箭头却反而被“瘊子甲”的孔洞刮得反卷了起来。

“瘊子甲”为什么这样坚硬？它是怎样制造的呢？沈括介绍说：锻制铁甲的方法是这样的，取比较厚的铁片做原料，不用火烧加热，而是采用冷锻的方法，一直锻打到它的厚度比原来减小2/3，这就制成了。怎样测量锻薄了多少呢？就象疏通河道时留下用来测量原有高度的土桩那样，锻铁甲时故意在边上留着筷子头大小的地方不去锻它，形状好像人的皮肤上长的瘊子，所以这种甲片叫做“瘊子甲”。

沈括最后指出：现在人们往往在甲片的背面特地造成突出的一小块，冒充瘊子。这种铁甲虽然有瘊子，但不是用精钢制成，或者采用热锻的方法，都不实用，只是外表的装饰品罢了。

这个故事，沈括写在有名的科学著作《梦溪笔谈》里。①

---

① 《梦溪笔谈·器用》：“青堂羌善锻甲，铁色青黑，莹彻可鉴毛发，以麝皮为繸（qiū，革带）旅之，柔薄而韧。镇戎军有一铁甲，椟（dú，木柜、木匣）藏之，相传以为宝器。韩魏公帅泾原，曾取试之。去之五十步，强弩射之不能入。尝有一矢贯札，乃是中其钻空，为钻空所刮，铁皆反卷，其坚如此。凡锻甲之法，其始甚厚，不用火，冷锻之，比元厚三分减二，乃成。其末留箸（zhǔ，筷子）头许不锻，隐然如瘊子，欲以验未锻时厚薄，如浚河留土笋也，谓之‘瘊子甲’。今人多于甲札之背隐起，伪为瘊子，虽置瘊子，但元非精钢，或以火锻为之，皆无补于用，徒为外饰而已。”

其他一些古籍也提到冷锻铁甲的问题，例如，李焘在《续资治通鉴长编》中，记载了北宋庆历元年（公元1041年）的一份官方文件。其中也谈到羌人的“甲皆冷锻而成，坚滑光莹，非劲弩可入。”其后，岳飞的孙子岳珂在《愧郯（tán）录》“冷端（锻）甲”一则中，又谈及“甲不经火，冷砧则劲可御矢，谓之冷端”，并且说“此甲在祖宗朝已有之。”从岳珂的记载看，冷锻甲片的方法在宋朝所辖境内也曾采用过，并不限于地处西北的羌族人。

这些记载，尤其是《梦溪笔谈》讲的，是对金属冷作硬化（强化）特性应用得当的一个典型例子。现代实验表明，像炭素钢之类金属的冷加工变形量小于60～70％时，变形量越大其强度性能越好；但变形量不能过大，否则会急剧变脆。沈括所讲的变形量，大体上符合这一规律，所以甲片坚硬得把铁箭头刮得反卷。

其实，利用金属冷作硬化特性的经验可以追溯到更早。在北京琉璃河出土的一件西周早期青铜戈，金相分析表明，它的刃部可能经过冷锻，以使锋刃更为尖锐，并提高它的硬度和强度。

参考文献

[5.1] 老亮，“中国古代材料力学史料杂录(一)、(三)”，《力学与实践》，3(1990)、3(1991)。

[5.2] 北京钢铁学院《中国冶金简史》编写小组，《中国冶金简史》，科学出版社，1978。

[5.3] 杨宽，《中国古代冶铁技术发展史》，上海人民出版社，1982。

[5.4] 田长浒，《中国金属技术史》，四川科学技术出版社，1988。

[5.5] 《梦溪笔谈选注》注释组，《梦溪笔谈选注》，上海古籍出版社，

1978。
[5.6] 中国科学技术大学、合肥钢铁公司《梦溪笔谈》译注组，《〈梦溪笔谈〉译注[自然科学部分]》，安徽科学技术出版社，1979。
[5.7] 老亮，《中国古代材料力学史》，国防科技大学出版社，1991。

六、摩天楼的先驱

塔，是东汉时随着佛教的传入从印度引进的。然而，印度早期的佛塔与我们现今在国内各地看到的许多古塔不同，其结构比较简单，形制有点像我国的古墓，塔身建筑在方形的台座上，就像个倒扣的化缘钵那样。它是一种实心的建筑物。佛塔传入以后，很快便与我国亭、台、楼、阁等传统的建筑形式相结合，成为一种具有中国特色的建筑物（例如，我国的塔往往可用以登高望远，这是突出的一个特点）。后来，还影响到朝鲜、日本和越南等国家。我国留传至今的古塔数以千计，关于古塔的种种文艺作品、科学论著和故事传说等非常之多，这里只能谈谈其中与力学问题有关的点点滴滴。

沈括在《梦溪笔谈》里，讲了一个关于这种古代高层建筑的有趣故事。①

公元964年，钱俶统治浙东和浙西的时候，在杭州梵天寺重建一座木塔。才建造了两三层，钱俶就登上木塔，因为塔有点晃动，使他十分不安。建筑木塔的师傅解释说："因为还

① 《梦溪笔谈·技艺》："钱氏据两浙时，于杭州梵天寺建一木塔，方两三级，钱帅登之，患其塔动。匠师云：'未布瓦，上轻，故如此。'乃以瓦布之，而动如初。无可奈何，密使其妻见喻皓之妻，赂以金钗，问塔动之因。皓笑曰：'此易耳。但逐层布板讫，便实钉之，则不动矣。'匠师如其言，塔遂定。盖钉板上下弥束，六幕相联如胠箧（qūqiè，这里指箱子），人履其板，六幕相持，自不能动。人皆伏其精练。"

未铺瓦，上面轻，所以才会晃动。”于是把瓦铺上，但塔仍然是晃动的。建筑师傅急得没有办法，便暗中叫他的妻子去找喻皓的妻子，将金首饰赠送给她，以便向喻皓请教木塔晃动的原因。喻皓笑着说：“这事很容易，只要逐层将木板铺好，然后用铁钉钉牢，塔就不会晃动了。”建筑师傅按照喻皓讲的方法去做，木塔果然稳定不动了。这是因为将木板钉好后，上下相互约束得更加紧密，前后、左右、上下六个面联结起来好像一个箱子似的。人在板上走动，这六个面相互支持，当然不会晃动了。人们都很佩服喻皓高超的技艺。

喻皓，有的书上又叫预浩，是北宋有名的建筑大师，曾担任杭州都料匠。写过《木经》三卷，可惜已经失传了。在这个故事里，喻皓讲用钉子把木板钉实这种加强木塔整体性的办法，以及沈括关于钉板可使上下约束得更紧密、六面相联像箱子的分析，表明当时对于增加结构各部分的相互约束可以提高整体刚度的道理，已经有所认识。

其实，增加多余约束以提高结构的强度和刚度的经验，可以追溯到更早。表 6.1 列出了殷周时代车辆轮子辐条数目演变的情况。从殷商到战国，轮辐数目呈逐渐增多的趋势。这

表 6.1

辐数 时代	16	18	21	22	24	25	26	28	29	30	32	34
殷商	—	—		—			—					
西周		—	—	—	—	—						
春秋	—					—	—	—	—		—	
战国		—				—	—			—	—	—

可能是出于提高车轮的强度和刚度的考虑。

关于喻皓，我们再讲一下他建造斜塔的故事。

宋太宗时，喻皓在开封主持建造了开宝寺塔。为了设计和建造这座13层的高大建筑，他先做模型，然后施工。欧阳修在《归田录》中记载了喻皓建造这座八角形木塔的情景："开宝寺塔在京师诸塔中最高，而制度甚精，都料匠预浩所造也。塔初成，望之不正而势倾西北。人怪而问之，浩曰：'京师地平无山而多西北风，吹之不百年当正也。'其用心之精盖如此。国朝以来木工，一人而已。至今木工皆以预都料为法。有《木经》三卷行于世。"可惜这座古代摩天楼在宋代时就被一场大火烧毁了。

类似的古代摩天楼至今尚在，山西应县佛宫寺释伽塔便是其中最突出的一座。它建成于公元1056年，通常又叫应州塔（图6.1）。①它是我国现存最早、最高大的木塔，也是世界上现存最高大的古代木构建筑。

应州塔的塔身平面为八角形，底径30米。从外表看，似为五层，这是外层，还有暗层四级，实际上一共九层，顶上有铁刹。据一般记载，连塔刹在内，塔的总高度达 67.31 米（另据 1974 年测量，则是 66.49 米）。900多年来，应州塔经受了烈日严寒和狂风暴雨，以及地震（例如，1305 年发生烈度八级的大地震，寺旁房屋全部倾塌，此塔却安然无恙。）和数以百计的炮弹袭击，至今仍巍然屹立。为什么这座古代高层建筑如此坚固呢？

显然，应州木塔有许多符合力学原理的地方。这里只举其中突出的一条：它的整个结构体系与现代高层建筑所用的"双筒体"式结构相类似。现代建筑界公认，筒体结构是高层建

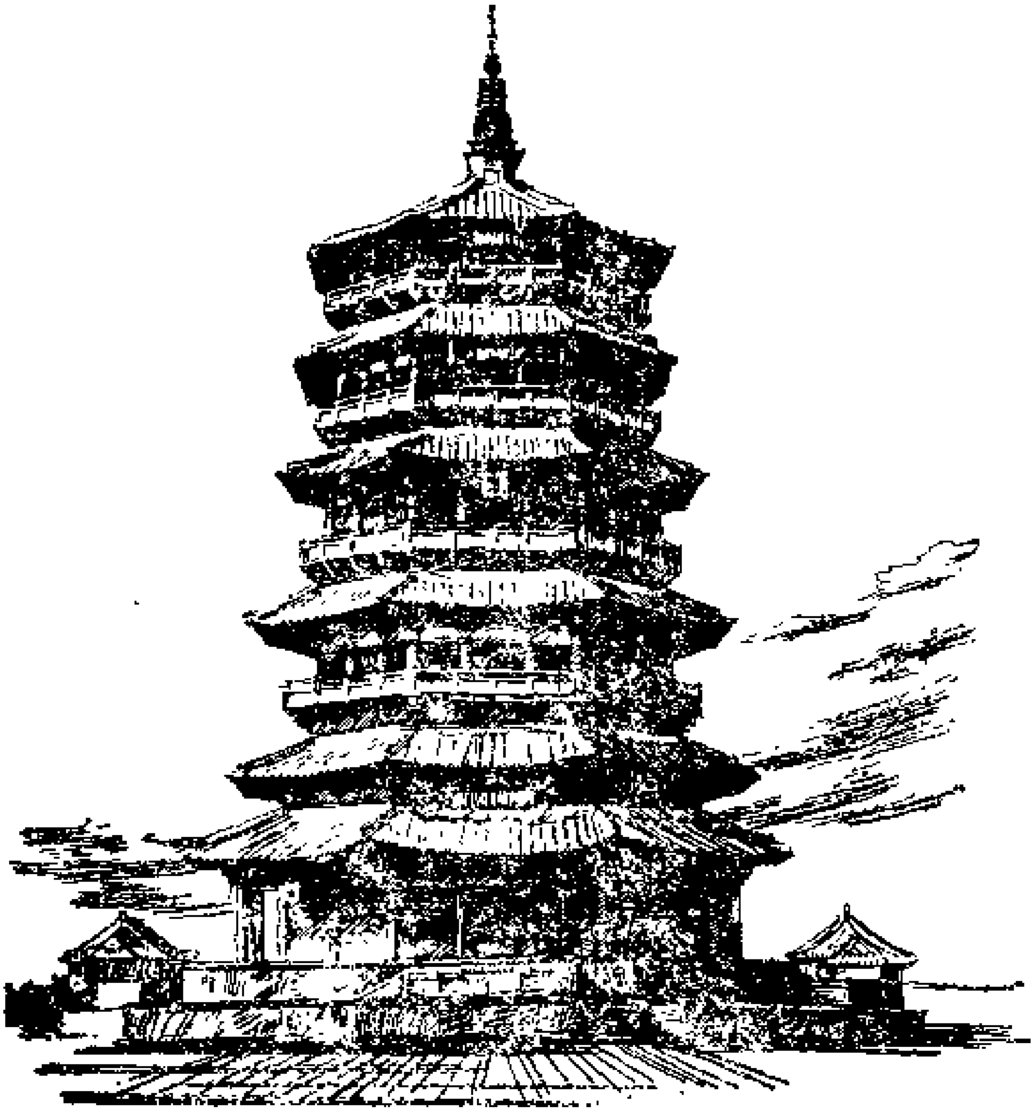


图 6.10[①]

筑中抗震性能最好的一种体系。可以说，应州塔是高层筒体结构的先驱。

最后介绍两个有趣的数字。据70年代对应州塔的观测，在风速8.5～9.5米/秒的情况下，塔顶最大水平位移仅有0.2毫米。美国纽约两座并立的世界贸易中心大楼，它们都采用了

① 此图取自文献[6.6]。

双筒体结构体系。外形是边长63.5米、高411米的方柱体，有110层。① 1973年建成后，在普通风力下大楼摆动2.5厘米，实测最大水平移动达28厘米。这比应州塔的变形大得多，是什么缘故呢？粗略的分析至少有这样一些原因：一、八角形所受的风力要比方形小（当塔的平面面积相同时，八角形比方形所受的风力减少5％）；二、高径比不同；三、风力的大小与房屋高度平方成正比，因而最大挠度与房屋高度的6次方有关，看来这是最主要的因素。

参 考 文 献

[6.1] 老亮，"中国古代材料力学史料三则"，《力学与实践》，4(1985)。

[6.2] 《梦溪笔谈选注》注释组，《梦溪笔谈选注》，上海古籍出版社，1978。

[6.3] 中国科学技术大学、合肥钢铁公司《梦溪笔谈》译注组，《〈梦溪笔谈〉译注[自然科学部分]》，安徽科学技术出版社，1979。

[6.4] 李世温，"应县木塔对地震的反应"，《自然科学史研究》，3(1982)。

[6.5] 吴焕加，"外国近现代建筑史话"，《自然辩证法通讯》，3(1979)。

[6.6] 徐华铛，《中国古塔》，轻工业出版社，1986。

[6.7] 老亮，《中国古代材料力学史》，国防科技大学出版社，1991。

[6.8] 郑力鹏，"中国古塔平面演变的数理分析与启示"，《华中建筑》，2(1991)。

---

① 一说边长63米、总高412米。

七、斗拱的妙用与合理的截面

在房屋建筑中，斗拱（或写作"斗栱"；图7.1）是我国独创的一种结构。它有多方面的功能，堪称中国一绝。在这里，我们从力学的角度简单谈谈它的作用。

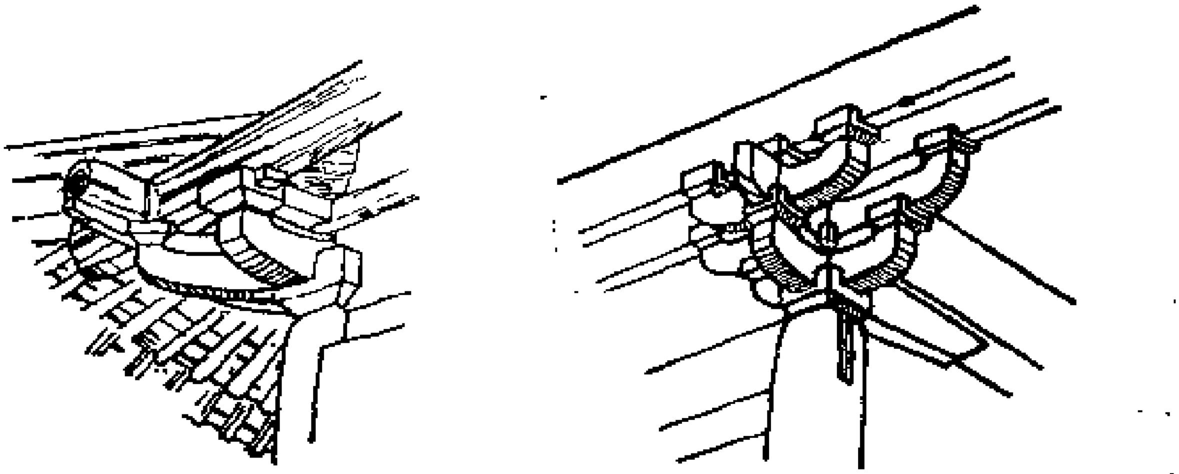


图 7.1

我国传统的木构房屋，屋顶重量主要通过梁桁等横向构件传至立柱。如果横梁与立柱直接接触，由于接触面积小，压应力大，横梁有被局部压坏的危险，因为木材的横纹抗压强度一般只有顺纹抗压强度的几分之一或十几分之一。在立柱与横梁之间设置斗拱，可以增大横梁的受压面积，减低压应力的数值，使横梁的承载能力得到改善。

斗拱可以减小梁的计算跨度，从而减小梁所受的弯矩和

剪力，提高梁的承载能力。下面以山西五台现存两座有名的唐代木构建筑的梁式构件为例来说明这一点。

南禅寺大殿的一根“搽风榑(tuán)”，由于采用斗拱，跨度由5.01米减小至3.01米。如果不设置斗拱，最大弯矩和剪力分别是有斗拱时的2.56倍和1.58倍。

佛光寺大殿的一根“四椽栿”，由于采用了斗拱，使跨度缩短46%，从而大大降低此梁式构件所承受的弯矩和剪力的数值，节省了栋梁大材。

尤其值得注意的是，斗拱具有良好的抗震性能。下面以70年代我国两次大地震为例来说明这一点。

1975年2月4日海城地震，用水泥砂浆砌筑的混合结构倒塌了不少，而三学寺中的前后殿却基本完好。海城镇内99%的建筑物遭到不同程度的破坏，而邻近破坏最严重地段的关帝庙，它的前后殿亦毫无损坏。对海城地震区寺塔情况的调查表明，梁柱式的木结构有一定的抗震性，有斗拱的大建筑物比无斗拱的小建筑物具有更好的抗震性能。

1976年7月25日，唐山、丰南一带发生强烈地震，靠近唐山的蓟(jì)县，震动也较大。在独乐寺前的辽代白塔，塔顶被震掉，半圆形的塔肚被震裂，相轮被震塌了一部分。在独乐寺内一些明、清时代的小型建筑大部分被震得墙倒顶塌。而建于公元984年、高达20余米的独乐寺观音阁却安然无恙。据古籍记载，1679年北京东郊三河、平谷一带发生八级强烈地震时，也有类似的情况：官房民舍无一存，唯有独乐寺观音阁独不倒塌。

斗拱为什么具有良好的抗震性能呢？我们知道，斗拱是一种柔性节点，在地震等强大外力作用下，各构件之间可以稍微相互错动而不分离，使构件不致折断。在外力缓解后，由

于结构处于弹性状态而能够基本恢复原状。据说 1976 年唐山地震时，观音阁顶部一时晃动出不少，之后随即又恢复原位。从能量的角度来说，斗拱能增加阻尼作用。为了减震，人们现在提出的一种方法是安装消耗能量的阻尼装置。斗拱实际上也起到这样一种阻尼装置的作用。应州塔有各式大小斗拱 54 种，① 仅从外观上可以看到的共有 320 个。它们对这座古代摩天楼的长寿无疑作出了贡献。

当然，观音阁在唐山大地震时没有倒塌，还有其他的原因。例如，我国一些古代木构建筑，往往用材过大。对于抵抗大风和地震引起的水平推力来说，过分厚重的梁架和屋面并不好。而观音阁上层梁架和屋顶则比较轻巧，因此有效地抵御了地震横波和面波的破坏作用。我国著名建筑学家梁思成先生早年对独乐寺观音阁的五架梁，曾做过静载荷、活载荷以及挠曲、剪切等应力的计算，结果表明其用材非常得当。梁思成先生惊叹说："宛如曾经精密计算而造者！"

下面我们转到合理截面的问题。

从一根圆木截取一根矩形梁，截面的高宽比怎样选取才合理呢？18 世纪初，法国学者帕伦(A.Parent)指出，高宽比为$\sqrt{2}:1$时强度最大；到 19 世纪初，英国科学家杨又指出，高宽比为$\sqrt{3}:1$时刚度最大。其实，早在12世纪初，我国有关著作就已涉及这个问题。

在 1103 年出版的李诫《营造法式·大木作制度》中，规定矩形木梁的高宽比应取为 3：2："凡梁之大小，各随其广分为三分，以二分为厚。"这就是说，《营造法式》的规定介乎$\sqrt{2}:1$与$\sqrt{3}:1$之间，具有较大的强度和刚度，十分合理。

---

① 一说60多种。

根据对 8 ～ 12 世纪我国34座古代建筑121根梁式木构件的实测，高宽比的频数分布如图 7.2 所示。高宽比在$\sqrt{2}$：1至$\sqrt{3}$：1 范围内的有65根，占53.7％。如果这些梁式构件都是由一根圆木截取的，则大部分尺寸是比较合理的。

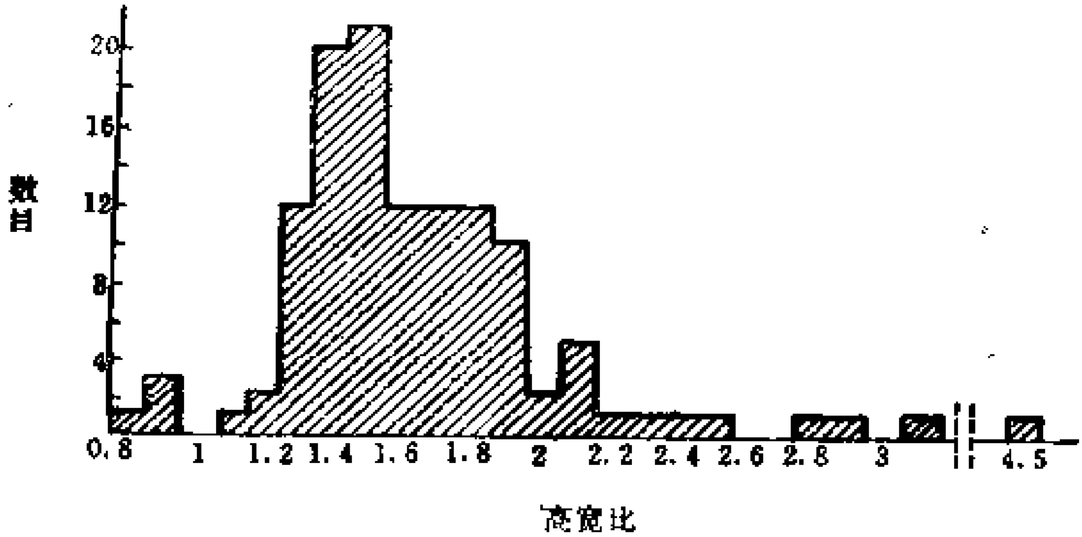


图 7.2

矩形梁的应用，可以追溯到远古。在距今六七千年的浙江余姚河姆渡遗址中，就发掘出有矩形截面的梁式构件。例如，有截面32×10厘米的木梁，截面26.5×11 厘米和 13×9 厘米的木枋等。

合理截面的例子是很多的，下面再举几个。

商周时青铜鼎等一类器物的柱足，有不少截面是空心圆形和空心三角形的。也有的采用槽形、半圆环形、马蹄铁形、狭长矩形，T字形或类似于工字形等截面形状。这样的柱足比起实心圆柱足来，有好多优点。除了节省材料外，从力学角度看，可能出于两方面的考虑：第一，可以避免在铸造的冷缩过程中因厚薄悬殊而引起缩孔和裂纹；第二，具有较大的抗弯强度和抗弯刚度。

商周时代，一些长矛的柄采用圆截面，一些戈、戟的柄

制成长圆形截面，与《考工记》的规定一致。① 为什么矛与戈、戟的长柄采用了不同的截面形状呢？因为矛用于直刺，它的柄相当于轴向受压的柱子，所以用圆截面是合理的；而戈和戟主要用于钩击，长圆截面的柄便于掌握方向，从力学上考虑也是适宜的，因为它们的柄受偏心拉伸或拉弯的组合作用。

自古以来，房屋的柱子与梁常用矩形截面不同，多属圆截面或各种正多边形截面，除了艺术和宗教等因素外，显然也反映了力学上的经验（具体例子留到后面第十六篇"漫步压杆之林"再谈）。

与选用合理截面同时，近乎等强度的变截面梁也常有应用。例如，商周时的车轴，大都是中间粗两端逐渐缩小的变截面圆轴，鼎一类器物采用上大下小的柱足，等等。

参考文献

[7.1] 于倬云，"斗栱的运用是我国古代建筑技术的重要贡献"，《科技史文集》，第5辑，上海科学技术出版社，1980。

[7.2] 罗哲文，"谈独乐寺观音阁建筑的抗震性能问题"，《文物》，10(1976)。

[7.3] 祁英涛、柴泽俊，"南禅寺大殿修复"，《文物》，11(1980)。

[7.4] 潘谷西，"《营造法式》初探(二)"，《南京工学院学报》(建筑学专刊)，2(1981)。

[7.5] 郭黛姮，"从近现代科学技术发展看中国古代木构建筑技术的成就"，《自然科学史研究》，4(1983)。

[7.6] 老亮，"《考工记》中的强度知识"，《力学与实践》，1(1988)。

① 《考工记·庐人》："凡兵，句（gōu，同"勾"）兵欲无弹，刺兵欲无蜎（yuān，挠曲），是故句兵椑（pí，椭圆形），刺兵抟（tuán，圆。）" 详见拙作[7.8]第147页。

[7.7] 老亮，"中国古代材料力学史料杂录(四)"，《力学与实践》，4(1991)。
[7.8] 老亮，《中国古代材料力学史》，国防科技大学出版社，1991。

八、“发引千钧”可能吗？

据《列子·仲尼》记载，公孙龙提出过“发引千钧”的问题。人们会问，“发引千钧”可能吗？

为了回答这个问题，我们先来看看头发的强度。根据文献[8.1]介绍，青少年的头发直径在0.04～0.08毫米之间。拉断一根直径0.05毫米的头发，需要0.9牛顿的力；0.07毫米的要1.6牛顿；0.08毫米的要1.9牛顿。也就是说，人发的强度极限在380～460 MPa之间，和A3钢差不多。

如果将“发”理解为一根头发丝，就像韩愈在《昌黎集·与孟尚书书》中形容危急所讲“一发引千钧”那样，这时头发丝受到多大的拉应力呢？我们知道，1钧等于30斤，若按韩愈所处的唐代计，千钧就是176×10^3牛顿。若取发径为0.06毫米计，“一发引千钧”时的拉应力达62.1×10^6 MPa，比头发的强度极限大十多万倍。显然，“一发引千钧”是绝对不可能的。

据说，古埃及一种船舶结构上用的缆绳，可能是用妇女的头发编成的。《史记·匈奴传》也提到古人辫发上的饰物。如果公孙龙讲的“发”不是一根头发丝，而是由许多头发编成的发绳，那它是否可以引千钧呢？

以公孙龙所处的周代计，千钧约合7×10^4牛顿。若以拉断一根头发丝平均要1.47牛顿的力计算，并假定发绳中各头发丝受力均匀，那么，千钧的力可以拉断4.76万根头发。若以头发丝直径平均为0.06毫米计算，并设想发绳能编成密实无间的圆形截面，则4.76万根头发丝编成的发绳直径约为13毫米，比这样稍大的发绳也并不算太粗，可以编成。所以用发绳引千钧是可能的。

当然，这种可能性是有条件的。这个必不可少的条件就是《列子·仲尼》所引公子牟的解释："发引千钧，势至等也。"《列子》中这个"势"字，用今天的术语来讲，就是"应力"的意思。总之，如果发绳的应力均匀分布，十几毫米粗的发绳便可以引千钧了。但是，这时确有断裂的危险，因为"势至等"是不容易做到的。

《墨经》也讨论过头发悬挂重物是否会被拉断的问题。《墨子·经说下》写道："均，发均。悬轻而发绝，不均也。均，其绝也莫绝。"人们对此有多种解释，这里仅介绍其中一种。若将"发"理解为一些头发而不是一根头发丝，可以用只有三根弹簧的扩胸器（即拉力器）为例，通过分析超静定问题的方法，来推想《墨经》的意思。如果扩胸器的三根弹簧一样长，拉伸时每根弹簧所受的力相同。如果中间一根比其他两根短一些，开始拉伸时只有短的一根受力，其余两根都不受力。及至拉到三根弹簧都受力时，中间一根所受的力就比其他两根大。这样，受力不均的扩胸器比受力均匀的容易毁坏。同样，受力不均的发绳比受力均匀的容易被拉断。这或许就是《墨经》所要说明的问题。

《考工记》讲，有的皮革摊开时翘曲不平，一边松、一边

紧。使用起来便会从紧的一边先破裂。① 显然，这种皮革破裂的原因，同样可以用扩胸器的例子加以说明。

参考文献

[8.1] 胡宗一，"一发千钧的力学含义考辨"，《力学科普》，2(1986)。

[8.2] 钱宝琮，"《墨经》力学今释"，《钱宝琮科学史论文选集》，科学出版社，1983。

[8.3] 老亮，"中国古代材料力学史料杂录(四)"，《力学与实践》，4(1991)。

[8.4] 老亮，《中国古代材料力学史》，国防科技大学出版社，1991。

① 《考工记·鲍人》："信(shēn，通"伸")之而枉，则是一方缓、一方急也。若苟一方缓，一方急，则及其用之也，必自其急者先裂。"

九、错误的公式，正确的结论

伽利略在比萨斜塔上做落体实验的传说，尽管是真是假仍有争论，但却广为人知。而他在材料力学上的贡献，虽然有案可查，倒不一定为人所共知。所以我们多花一点篇幅，专门介绍一下他的工作。

伽利略有关材料力学问题的论述，发表在1638年问世的《关于力学和局部运动的两门新科学的对话和数学证明》（简称《两门新科学的对话》）一书中（该书包括四天的对话。头两天讨论材料力学问题，后两天讨论动力学问题）。一般认为，最早尝试用科学的解析方法确定构件尺寸的，就是这位科学巨匠。

在《两门新科学的对话》中，伽利略首先讨论了直杆的简单拉伸问题。如图9.1所示，设想一根用木料或其他固体材料制成的圆杆 AB，牢接在天花板上，下端悬挂重物 C。如果 C 的重量越来越大，杆件最后总会像绳索那样断开。伽利略指出，同样粗细的麻绳、木杆、石条、金属棒的强度是各不相同的；对于用同一种材料制成的杆件，承载能力与横截面积成正比，而与它的长度无关。他把杆件这种承载能力叫做"断裂时的绝对抗力"。

对于梁的强度问题，伽利略进行了详细的讨论。

设想一等截面杆 $ABCD$，如图9.2所示，AB 端固定

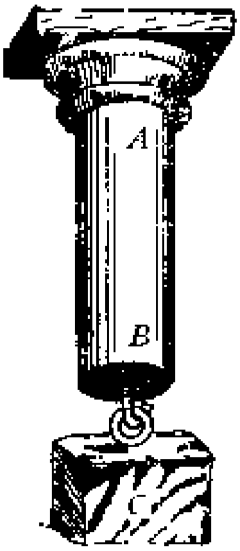


图 9.1①

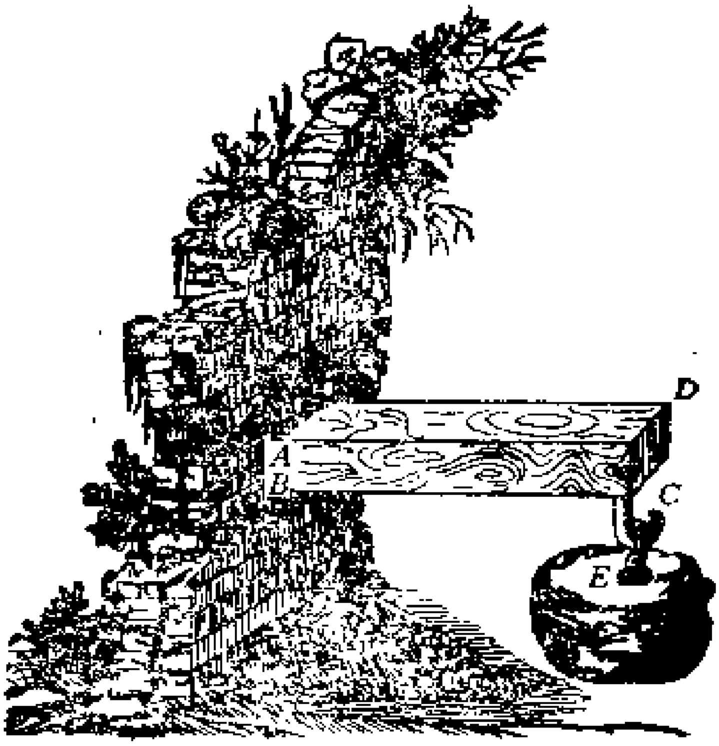


图 9.2

在墙壁上，*CD* 端悬挂重物 *E*。他断言："显然，如果杆件断裂，断口将发生在 *B* 的部位，此处固接的边缘充当施力杠杆 *BC* 的支点，而杆的厚度 *BA* 则是杠杆的另一臂，沿 *BA* 作用有抗力。以此阻止墙内部分与墙外部分 *BD* 分离。由此可

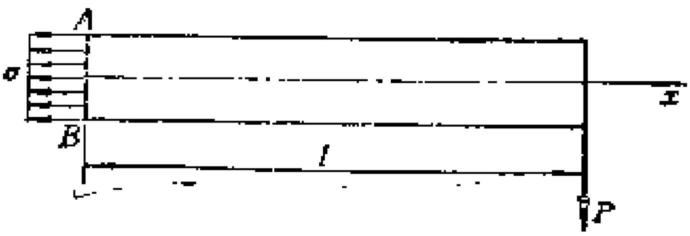


图 9.3

知，作用在 *C* 处力的大小与杆件厚度内抗力大小之比(厚度

① 图9.1、9.2、9.4和9.5均取自文献[0.1]。

指 BA 端与其接连部分的嵌接高度)，等于厚度 $\hat{B}\hat{A}$ 之半与长度 BC 之比。"伽利略的设想是，发生断裂时"抗力"在截面 BA 上均匀分布，如图 9.3 所示，类似于拉伸时的"绝对抗力"。

如果用现代的术语和常用的符号来表示伽利略的意思，可以得到下列的公式：

由$\Sigma M_B = 0$，即

$$Pl = (\sigma \cdot bh)\frac{h}{2} \quad \text{(用于高}h\text{宽}b\text{的矩形截面)}$$

$$Pl = \left(\sigma \cdot \frac{\pi d^2}{4}\right)\frac{d}{2} \quad \text{(用于直径为}d\text{的圆截面)}$$

得到

$$\sigma = \frac{M}{\dfrac{bh^2}{2}} \quad \text{(矩形截面)}$$

$$\sigma = \frac{M}{\dfrac{\pi d^3}{8}} \quad \text{(圆截面)}$$

显然，图 9.3 所示的应力分布，不能满足$\Sigma X = 0$的平衡条件。① 因此，这种应力分布是不可能的，伽利略的公式是错误的。

有趣的是，伽利略从上述含有错误的分析出发，却得出了一些正确的结论。

例如，在《两门新科学的对话》中，伽利略比较了图 9.4 所示矩形截面悬臂梁(梁的左端为固定端，此处照原书上的图

---

① 我们今天在静力学课程中熟悉的刚体上力系的简化和平衡，是 19 世纪初潘索(L.Poinsot)才用明确公理体系阐明清楚的。——朱照宣教授审稿时加的注。

而未表示出来）两种放置方法的强度。他指出：侧放与平放的承载能力之比，等于宽度与厚度之比。

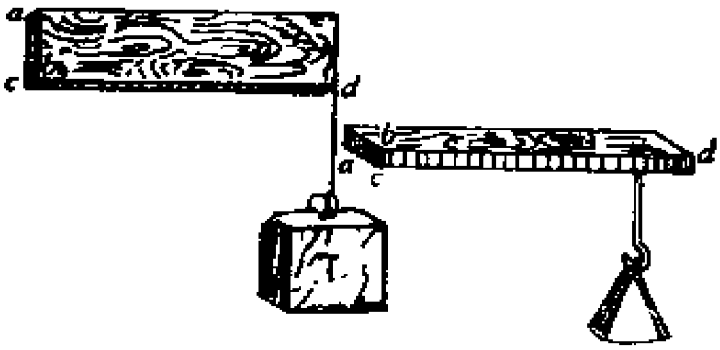


图 9.4

如果用现代的梁弹性弯曲的正应力公式进行计算，得出的结论与伽利略是完全一样的：

$$\frac{W_{侧放}}{W_{平放}}=\frac{\frac{bh^2}{6}}{\frac{hb^2}{6}}=\frac{h}{b}$$

又如，对于图 9.5 所示的悬臂梁（左端固定、右端受铅垂集中力，此处照原书上的图而未表示出来），伽利略指出，等宽度、变高度的等强度梁的高度变化应满足如下关系：

$$BA:BC=AF^2:CN^2$$

即取图示的抛物线FNB。

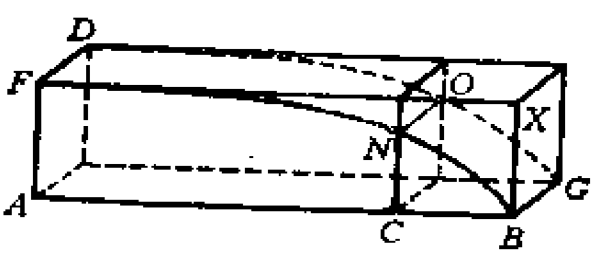


图 9.5

如果记$BC=x$，$BA=l$，$AF=h_0$，$CN=h(x)$，由现代的等强度梁弹性弯曲公式：

$$\frac{Px}{\frac{bh(x)^2}{6}}=\frac{Pl}{\frac{bh_0^2}{6}}$$

可得

$$\frac{l}{x}=\frac{h_0^2}{h(x)^2}$$

也和伽利略的结论完全一致。

为什么伽利略从错误的应力分布出发，可以得出正确的结论呢？如果我们将现代的直梁弹性弯曲公式与伽利略的公式加以比较，便可看出两者的差别仅在抗弯截面系数 W 的大小上，如表 9.1 所示。

表 9.1

截面形状	伽利略的W	现代的W
矩形	$bh^2/2$	$bh^2/6$
圆形	$\pi d^3/8$	$\pi d^3/32$

而在定性上，从伽利略的公式可以得到与现代的公式相同的结论如下：

矩形截面梁的承载能力$\propto bh^2$

圆形截面梁的承载能力$\propto d^3$

因此，当讨论的问题涉及两个矩形截面或两个圆形截面的比较时，在量上的差异便显示不出来，于是得到与现代理论一样的正确结论。

由于同样的原因，伽利略对自重作用下几何相似的悬臂梁也得出了正确的结论：由自重引起固定端的力矩与线尺度

的 4 次方成正比，而截面上抗力的力矩则与线尺度的 3 次方成正比。因此。几何相似的梁在强度上是不相等的。尺寸越大，梁就越弱，当尺寸增大到一定程度时，梁仅由于自重就会破坏。

根据这样的分析，伽利略发表了一段有趣的议论：无论是人工的或是天然的结构物，它们的尺寸都不能增加到很大。人们不能造出非常巨大的船舶、宫殿和庙宇，自然界也不会生长出异乎寻常的大树。“一只小狗也许能在它的背上驮起三只同它一样大的狗；但是我相信，一匹马甚至连一匹同它一样大的马也驮不起来。”

在比较实心梁和空心梁的强度时，伽利略也发表了有趣的议论：空心梁“能大大提高强度而无需增加重量，所以在技术上得到广泛的应用。在自然界就更为普遍了。这样的例子在鸟类的骨骼和各种芦苇中可以看到，它们既轻巧，而又对弯曲和断裂具有相当高的抵抗能力。一根麦秆所支承的麦穗要比整个麦秆重，如果它用同样数量的材料而生长成实心的，那就会降低其抵抗弯曲和断裂的能力。一根空心的长矛，或者一根木制的或金属制的管子，比同样长度和重量的实心杆件要强得多。这是一个在实际中已被证实了的经验。”

参 考 文 献

[9.1] Galileo Galilei, *Dialogues Concerning Two New Sciences*, Dover(Macmillan, 1914)。

[9.2] S.P.Timoshenko, *History of Strength of Materials*, McGraw-Hill, 1953；铁木生可，《材料力学史》，上海科学技术出版社，1961。

十、中性轴的位置在哪里？

确定直梁弯曲时中性轴的位置，对于今天学过材料力学的人来说不会有什么困难。读者或许还记得，可以由平衡条件$\Sigma X=0$来确定它的位置。对于弹性弯曲，中性轴通过横截面的形心；对于理想塑性材料，中性轴等分横截面的面积。可是，“中性轴的位置在哪里？”却曾是困扰过许多科学家的一个问题，并出现过一些错误的理论。例如，从17世纪下半叶到19世纪上半叶，就流行过“中性轴的位置无关紧要”的看法，也有的认为中性轴位于截面的边缘，或者认为由横截面上拉力对该轴的力矩与压力对该轴的力矩相等的条件来确定它的位置，等等。我们在这里回顾一下关于中性轴问题迂回曲折的历史，或许是有趣而又有教益的。

早在1620年，荷兰物理学家和力学家比克门(I.Beeckman)就发现了梁的一侧纤维伸长、另一侧的纤维缩短。后来，胡克在1678年发表有名的弹性定律时也指出，当梁弯曲时，凸面上的纤维伸长、凹面上的纤维缩短。这都表明，梁内必然存在着既不伸长又不缩短的中性层。不过他们没有进一步讨论中性轴的位置问题。

伽利略在1638年出版的《两门新科学的对话》中，虽然对梁的强度问题作了详细的考察，但由于他认为梁横截面上只受到均匀分布的拉应力作用，所以并未牵涉到中性轴的问

题。

首先涉及中性轴位置问题的是马略特的论文"论水的运动"。在马略特去世后两年(1686年)才刊出的这篇论文中，记述了他在1680年所作关于梁的实验和理论的分析。

对于图10.1a所示的悬臂梁，马略特假定断裂时梁的悬臂段绕D旋转，并得出纵向纤维所受的拉力与其到D处的距离成正比的结论。对于矩形梁，拉力的总和等于$S/2$(其中S相当于伽利略定义的"绝对抗力"，用今天的术语和符号，$S=\sigma_bA$，σ_b是材料的强度极限，A表示梁的横截面积)，它对D的力矩为

$$\frac{S}{2}\times\frac{2}{3}h=\frac{Sh}{3}$$

式中h为梁的高度。将此值与所加载荷P对D的力矩Pl列成等式，即可求出极限载荷为

$$P=\frac{Sh}{3l} \qquad (a)$$

式中l为梁的长度(图10.1a)。由上述马略特的分析可见，他假定梁的横截面上只受拉应力作用，并按图10.1b所示呈三角形分布(即中性轴位于截面的一边)。

马略特也注意到，当梁弯曲时(图10.1a)，下半部ID的纤维受压，上半部IC的纤维受拉。他写道："你们可以想象，一半厚度的那部分挤压在一起，其中靠近外面的要比靠近中间的挤压得更厉害，而另一半厚度的那部分则伸展。"

为了计算这种情况下的极限载荷，马略特首先算出克服纤维抗拉能力所需的那部分载荷P_1。他利用式(a)，并将$h/2$代替h，得出

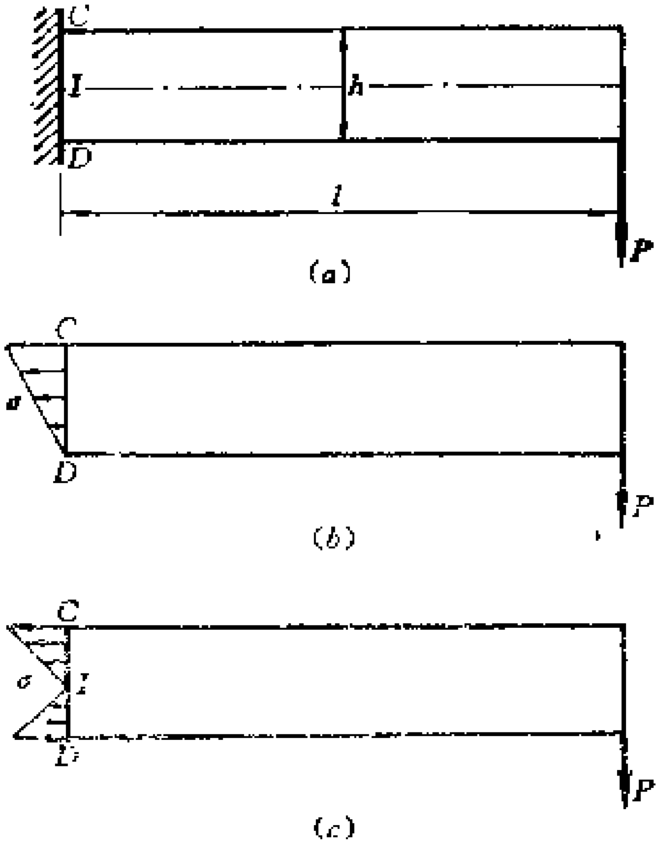


图 10.1

$$P_1 = \frac{Sh}{6l} \tag{b}$$

对于下半部 ID 的受压纤维，马略特假定这部分的压力分布规律与受拉部分一样呈三角形分布，而且"绝对抗力"也相同。于是，由于纤维受压而构成梁的另一部分强度也可用式(b)的公式，即

$$P_2 = \frac{Sh}{6l} \tag{c}$$

拉伸和压缩两部分相加，得到梁的极限载荷公式与式(a)完全相同：

$$P = P_1 + P_2 = \frac{Sh}{3l} \tag{d}$$

马略特的后一种分析，实际上认为梁横截面上的正应力分布如图 10.1c 所示，与现代的直梁弹性弯曲理论是一致的。然而，按照图 10.1b 和 c 两种不同的应力分布的设想，怎么会得出完全相同的极限载荷的公式呢？

读者仔细分析一下马略特的公式推导过程便会发现，他在计算拉力对 I 的力矩时出了点差错。因为这里不仅要用 $h/2$ 代替式(a)中的 h，而且这时是半个截面积，与原先的整个截面积不同，所以还要用 $S/2$ 代替式(a)中的 S。于是得到与式(d)不同的极限载荷如下：

$$P=\frac{Sh}{6l} \tag{e}$$

由于 $S=\sigma_b A=\sigma_b bh$（其中 b 表示矩形截面的宽度），所以由式(e)即得到与现代的直梁弹性弯曲正应力公式相同的结果：

$$\sigma_b=\frac{Pl}{\frac{bh^2}{6}}$$

只因为差了 1/2，马略特未能得出正确的公式，这是多么令人遗憾的事情！

由于这一失误，马略特从假设不同的应力分布出发，却得出了相同的结果。这无异于告诉人们，假定中性轴在截面的一边与假定在截面中央都是一样的，换句话说，中性轴的位置在哪里是无关紧要的。虽然马略特不一定如此明确地道出这一点，但实际上已经播下了“中性轴的位置无关紧要”这种错误理论的种子。后人或许是从他那里得出这个结论的。

其后，莱布尼兹考察了伽利略和马略特的假说，认为弯曲破裂前梁的纤维伸长了，“它们的抗力与伸长量成正比”。

1702 年，伐里农(P.Varignon)企图导出一个兼容伽利略和马略特两人的假说，而又更接近于所有实际情况的

一般公式。他假定纤维的抗力 u 沿 y 轴呈曲线而不是直线变化，如图10.2 所示。由载荷与截面上抗力对 x 轴的力矩互相平衡的条件，就得到

$$Pl = \iint uy\,dx\,dy$$

这种分析虽然不局限于弹性定律适用的范围，但和莱布尼兹一样忽视了压缩变形，显然也不能得出关于中性轴位置的正确结果。

从 1694 到 1705 年，雅各布·伯努利(1654～1705)在平面假设的基础上对梁的弹性曲线问题进行了反复的研究。在回顾了伽利略、马略特和莱布尼兹的工作之后，伯努利认为前人只注意到梁纤维的伸长，是他自己首先发现了其中有压缩变形。尽管他知道梁的一边受拉、另一边受压，但在确定既不伸长、又不缩短的纤维位置时，却感到困难、弄不清楚。最后竟明确作出这样的结论：不论纤维是全部伸长，全部缩短，或是部分伸长、部分缩短，其结果都是一样的。这样，伯努利便明确提出了“中性轴的位置无关紧要”的理论。他首先得出了直梁挠度曲线上任一点处的曲率与该处的弯矩成正比关系的正确结论，但由于将中性轴的位置取在矩形截面的一边，所以得出的比例常数是不对的（详见下一篇“计算梁变形的方法知多少”）。

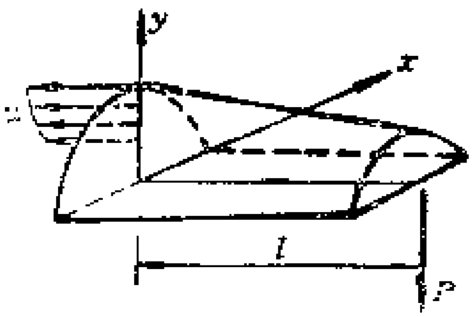


图 10.2

18 世纪初，法国学者帕伦研究梁的强度问题时，也将中性轴置于截面的边缘。其后，在 1713 年出版他的数学和物理

研究论文集中，对于梁横截面上的内力和中性轴位置的问题取得了突破性的进展。

帕伦仍然以悬臂梁自由端受集中力的情况来讨论。他首先发现，在梁的横截面上只有拉力而无压力是不能平衡的，必须两者同时存在且合力相等(即要满足 $\Sigma X=0$ 的平衡条件)。他还指出，在横截面上有剪力作用，并正确求出了它的大小。我们知道，对于矩形一类截面的梁，图 10.1c 的应力分布只是在拉压弹性模量相同时适用。帕伦假定断裂时中性轴不通过截面的形心，即拉力和压力是不同的三角形分布，如图10.3所示。

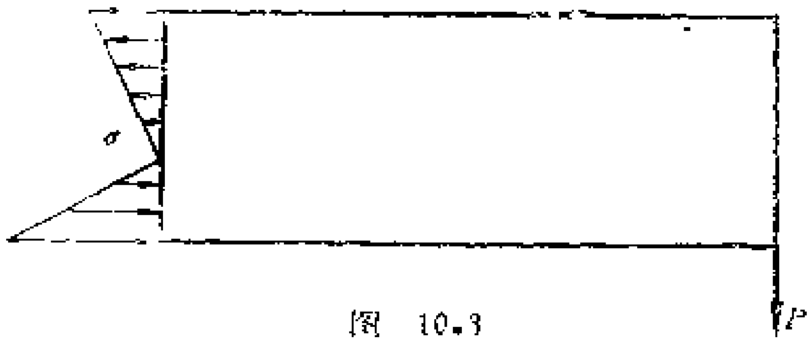


图 10.3

总之，帕伦认识到截面上的抗力必须组成一个与载荷相平衡的力系，从而纠正了马略特以来关于中性轴位置的错误见解。可惜他的学说被长期埋没了，甚至连剑桥大学上一世纪出版的托德亨特(I.Todhunter)和皮尔孙(K.Pearson)的历史巨著《弹性力学和材料力学史》，在介绍帕伦的工作时也没有提到上述的重要贡献。

比尔芬格(G.B.Bülfinger)在 1729 年撰写(1735年出版)的一篇报告里，评述了伽利略、马略特、莱布尼兹、伐里农、雅各布·伯努利和帕伦等人的工作。考虑到弹性定律并未为各种材料的实验所全面证实，比尔芬格建议拉伸时采用

应变 ε 与应力 σ 间的非线性关系式 $\varepsilon=a\sigma^{m}$(1694年伯努利首先提出过这一应力应变关系)。他还主张，在得出压缩应力应变的具体关系以前，中性轴的位置要由实验来测定。这就是说，他不同意中性轴位置无关紧要的观点。

看来库仑没有注意到他的同胞帕伦的论文集。库仑在1773年向法国科学院提出(1776年出版)的论文"极大值和极小值规则在建筑静力学问题中的应用"里，也分析了矩形截面悬臂梁在自由端受集中力的情况。他断定梁的凸面纤维受拉、凹面纤维受压。通过静力学三个平衡方程的应用，他知道在一横截面上水平分力的总和为零，垂直分力的总和与载荷相等，水平分力对中性轴的力矩等于载荷对该轴的力矩。对于直至断裂前弹性定律仍然适用的材料，他得出了极限载荷 P 与梁长 l、梁高 h 的关系式如下：

$$\frac{Sh}{6}=Pl$$

式中 S 的意义同上所述，即 $S=\sigma_b A$。这样，库仑得到了矩形截面梁弹性弯曲强度问题的正确结果。

遗憾的是，库仑的学说也有约半个世纪未被人们所广泛了解。从18世纪80年代到19世纪初，不少学者如黎卡提(G.Riccati)、吉拉德(P.-S.Girard)、鲁比孙(J.Robison)、杨、艾特尔魏因(J.A.Eytelwein)等，虽然其中有的人也知道梁的一边受拉、另一边受压，但都承袭了旧理论，或者置中性轴于横截面的边缘，或者认为中性轴的位置无关紧要。

纳维(C.-L.-M.-H.Navier)在中性轴位置的问题上，从1813到1826年的十多年间，经历了一个由错误逐渐转变到正确的过程。起初，1813年在为戈泰(E.-M.Gauthey)遗著所写的注释中，他也认为中性轴的位置无关紧要，可

以取在横截面的边缘。后来，1819年他在桥梁公路学校教授材料力学课程时，采用了另一种讲法。他认为中性轴的位置可以由这样的条件来确定：横截面上拉力对中性轴的力矩，应等于压力对该轴的力矩。

读者或许已经看出，纳维这种方法同今天材料力学书讲的方法是不一样的。那么，他的方法对不对呢？我们知道，对于弹性弯曲，中性轴通过横截面的形心。不难看出，对于中性轴对称的截面，如圆形、矩形、工字形等，用纳维这个条件同样可以得知中性轴通过截面的形心；但象三角形、T字形等对于中性轴不对称的截面，用他的条件得到的"中性轴"就不通过截面的形心了。试以图10.4的T字形截面为例，从反面来说明这一点：容易确定C为形心，而形心轴z以上部分对z轴的力矩并不等于z轴以下部分对z轴的力矩，后者刚好等于前者的两倍。因此，这类截面不能用纳维的方法确定中性轴的位置。

直到1826年，纳维在他有关材料力学的讲义第一版中，应用静力学三个平衡方程，才给出正确的结论：当材料服从弹性定律时，中性轴必定通过横截面的形心。

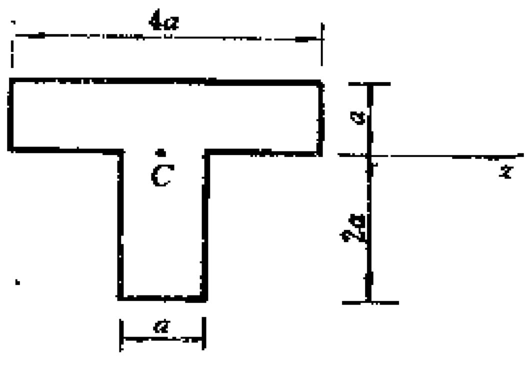


图 10.4

与纳维同期的一些学者也犯过类似的错误。例如，1820年杜洛(A.Duleau)误解了库仑的原意，亦认为横截面上拉力与压力对中性轴的力矩总是相等的。巴洛(P.Barlow)在1826年也有过同样的看法，到1837年才根据霍奇金森(E.Hodgkinson)1824年的论文作了更正。

纳维在他的书中，始终假定中性轴与外力平面正交。珀西(N.Persy)在1834年首先指出，这只有在力平面与梁的形心主惯面(形心主轴与梁轴线组成的平面)之一相重合时才是确切的。只有这样，截面上的内力对主轴之一的力矩才能相互抵消，而以对另一主轴的力矩与外力的力矩保持平衡。这就是通常所讲的平面弯曲的情况，此时中性轴不仅通过截面的形心，而且是形心主轴之一。

关于力平面与形心主惯面不重合时(斜弯曲)的中性轴方向，是由圣维南在1855年利用惯性椭圆理论的方法首先确定的。继霍奇金森(1824年)之后，圣维南在1864年也研究了弹性定律不适用时矩形截面梁的中性轴问题。至于中性轴位置的实验测定，随载荷增大中性轴位置的变化等问题，也有不少人研究过，这里就不予叙述了。

由上面的历史回顾可以看到，人们对于中性轴问题的认识本来有一个比较好的开端，后来为什么又出现曲折呢？看来原因是多方面的，试分析如下。

首先，材料力学的理论体系也正是在这个时期逐渐发展起来的。像确定承受一段均布载荷的简支梁最大弯矩位置的简单问题，甚至连纳维这样有名的力学家也搞错了(见后面"趣闻集锦及其他"一篇之7)。

其次，当时人们往往是从极限强度的角度来研究梁的问题(例如用破坏试验来检验理论公式)，这就不可避免地在力与变形的关系上带来某种复杂性，有的人或许因此在确定中性轴位置时遇到困难。

最后，从学术研究、交流和争鸣方面来看，也有一些原因和值得引起注意的地方。其一，有的学者对前人已经取得的成果缺乏全面和深入的了解，即使像库仑和纳维这样有名

的人物，也不曾注意到他们的同胞先前有关的论著。到了1837年，巴洛甚至还把正确确定中性轴位置的功劳归之于霍奇金森。其二，有的论文在表述和印刷上存在着这样那样的毛病，也是妨碍新的学说及时被人们广泛注意和引用的原因。例如，库仑的文章写得过于浓缩。帕伦的公式推导表达得难以令人理解，而且他的论文集出版质量很差，有不少印刷错误。此外，某些学术权威对旧理论的支持；帕伦喜欢批评当时其他一些学者以致发生了嫌隙(他对梁问题的新见解没有在法国科学院的刊物上发表，或许与此不无关系)，等等，也都是原因。

参 考 文 献

[10.1] 老亮，“梁中性轴简史试编”，《力学与实践》，4(1986)。

[10.2] I.Todhunter, K.Pearson, *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials*, Vols. I, II, Cambridge, 1886, 1893。

[10.3] S.P.Timoshenko, *History of Strength of Materials*, McGraw-Hill, 1953；铁木辛可，《材料力学史》，上海科学技术出版社，1961。

[10.4] H.F.Moore, The History of the Flexure Formula, *The Journal of Engineering Education*, 21, 2(1930)。

[10.5] A.E.H.Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge, 1927；《力学与实践》，1、2(1985)。

[10.6] 亚·沃尔夫，《十六、十七世纪科学、技术和哲学史》，商务印书馆，1985。

[10.7] C.Truesdell, The Rational Mechanics of Materials——Past, Present, Future, *Applied Mechanics Reviews*, 12, 2(1959)。

十一、计算梁变形的方法知多少

学生学习材料力学时，往往会提出这样的问题："计算梁变形的方法太多了，是不是只要掌握其中一种就行呢？"实际上，学生一般只不过学习了三几种方法，未学的其他方法还多着呢！这里我们先简要回顾一下有关梁变形问题的历史，然后再回过头来谈谈"计算梁变形的方法知多少"这个问题。

1963年，在山西朔县峙峪村附近发现的旧石器时代晚期遗址里，发掘出一枚石镞。经放射性碳素测定，峙峪遗址的年代距今近三万年。就目前考古发掘来说，这个石箭头是世界上最早的(或者是最早的箭头之一)。它由薄而长的燧石片制成，加工精细，前锋锐利。因此，人类最初使用弓箭的年代要比这枚石镞早得多。

弓箭的出现，标志着人类对于固体材料的弹性已经有了初步的认识和利用，同时也是对杆件弯曲变形的一种初步利用。然而，人类关于弹性定律和弯曲变形的记载，则是在弓箭使用了几万年(文字出现)以后。关于弹性定律的历史，第一篇已经讲过了。至于弯曲变形，大概以《易经》的记载为最早(如果说，画有弓箭的象形文字已暗含着弯曲变形之意，那就更早一些)。

《易·大过》说："大过：栋挠"，"栋挠，凶"。这是说，房屋的大梁变弯曲了，有倒塌的危险，所以凶多吉少，是一

种大的过失。为什么大梁弯了就有危险呢？因为从当时的科学水平来分析，"挠"是指肉眼所能看到的明显的弯曲变形，即栋梁已经弯曲得相当厉害，用今天的术语来说就是大变形，而不是用挠曲线近似微分方程所计算的小挠度问题。此后，我国许多古籍，如《墨经》、《考工记》、《韩非子》……等等，都有关于梁杆挠曲问题的记载。今天我们讨论梁变形时所用"挠曲线"、"挠度"等名词中的"挠"字，说来至少已有两千多年的历史了。

最早提出挠曲线问题的是纳莫尔(Jordanus de Nemore，13世纪)，他曾试图说明它是一种圆弧曲线。几百年之后，雅各布·伯努利又仔细研究了这个问题。他的有关论文首次在1694年发表，翌年加了注解和补充，1705年去世前又阐述了他的最后见解。

伯努利考察了矩形截面悬臂梁在自由端受集中力时的变形，如图11.1所示。

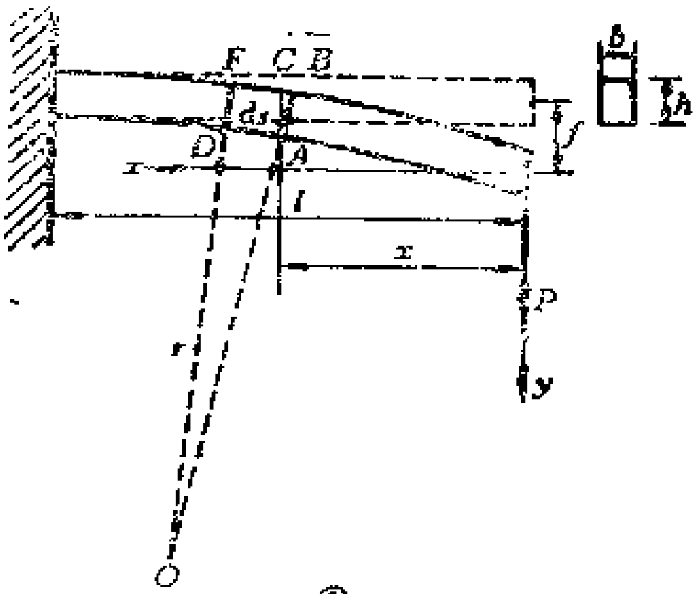


图 11.1①

① 此图取自文献[11.?]。

对于长为ds的微段，伯努利采取中性轴在凹面一边的假设，并假定横截面在梁变形后保持为平面，于是截面AB绕A轴（垂直于纸面）相对于DF转动，得到了DF和AB两截面之间纵向纤维的伸长与其到A轴的距离成正比的关系。对于凸边最外层纤维的伸长Δds，则有如下公式：

$$\frac{\Delta ds}{ds}=\frac{h}{r} \tag{a}$$

引用弹性定律和式(a)，并由截面AB上拉力合力与外力P两者对A轴的力矩相等的条件，最后得到

$$\frac{C}{r}=Px$$

$$C=\frac{mbh^3}{3} \tag{b}$$

式中r是弧DA即中性层的曲率半径，材料常数m相当于弹性模量E，$bh^3/3$相当于惯性矩I，但与我们现在熟知的正确值$bh^3/12$不同，这是由于对中性轴位置采用了错误的假设所致。尽管在定量上伯努利的公式有错误，但在定性上它却正确表示了挠曲线上任一点处的曲率与该处的弯矩成正比的关系，并成为后来欧拉等人进一步研究的基础。

根据丹尼尔·伯努利(1700～1782，他是雅各布·伯努的侄子，曾在俄国彼得堡科学院主持数学部工作)的建议，欧拉究研了梁的变形问题，其结果发表在1744年出版的一本关于变分法的专著的附录中。这是弹性曲线(elastica)方面第一次具有系统性的论著。

欧拉根据丹尼尔·伯努利提供的关于弹性板条变形能最小的原理，用他自己发明的变分法得到了前面图11.1所示梁的雅各布·伯努方利微分程

$$C\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=Px \tag{c}$$

欧拉的研究并不局限于小挠度问题，所以上式分母中的 y' 不能略去，因而求解相当复杂。他利用级数来积分，并表明当悬臂梁自由端的挠度 f 较小时，式(c)给出

$$C=\frac{Pl^2(2l-3f)}{6f} \tag{d}$$

在上式中将 $3f$ 略去，就得到常见的悬臂梁自由端的挠度公式

$$f=\frac{Pl^3}{3C} \tag{e}$$

上列各式中 C 与今天常用记号 EI 相当，即梁的抗弯刚度。欧拉并未深入探讨 C 的物理意义。他把 C 叫做"绝对弹性"，指出它与材料的弹性有关，并认为对于矩形梁来说，$C\propto bh^2$。显然，说 $C\propto h^2$ 是错误的，因为矩形截面的 $I=bh^3/12$。然而，没有过了多久，到 1757 年他就纠正过来了。

对于小挠度问题，式(c)可化简为

$$C\frac{d^2y}{dx^2}=M$$

当梁受横向分布载荷 q 作用时，欧拉认识到

$$\frac{d^2M}{dx^2}=q$$

从而证明其弹性曲线的近似微分方程是一个四阶微分方程，并成功地求解出在水的静压力下用代数式表示的挠度曲线。此外，欧拉还讨论过这样一个有趣的问题：如果一根具有初始弯曲的悬臂梁，在自由端受到一个横向力作用而变成直杆，那么它原始的曲线形状应该是怎样的呢？

众所周知，欧拉从弹性曲线的研究中得出了压杆稳定问

题的临界力公式。对于这方面的历史情况，我们留到后面第十六篇“漫步压杆之林”再来介绍。

从1819年起，纳维有关材料力学的讲义抄本便在学生中流传。修改后于1826年出版的该书第一版中，讨论了等截面梁的弯曲问题。采用平面假设，应用静力学三个平衡方程，他断定中性轴通过截面的形心，得出挠曲线微分方程如下：

$$\frac{EI}{\rho} = M$$

其中 I 为截面对中性轴的惯性矩。在小挠度的条件下，纳维得到了我们现在熟知的挠曲线近似微分方程：

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$$

在纳维以前，人们往往只是讨论悬臂梁或承受对称载荷的简支梁，而纳维讨论了承受任意横向力的简支梁，并开创了求解超静定问题的方法。他用两次积分法，求解了图 11.2 所示一端固定，一端简支的超静定梁，以及两端固定的梁和三支座的梁等超静定问题。

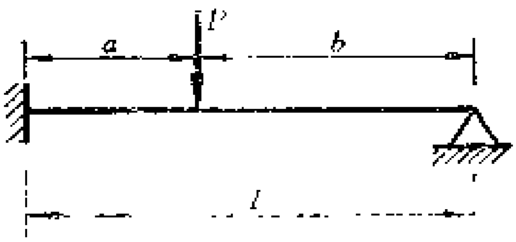


图 11.2

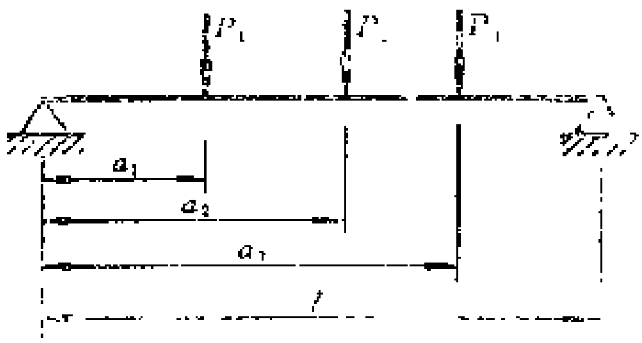


图 11.3

此后，人们为计算梁的变形提出了种种方法。例如，泊松在《力学教程》中（见1833年第二版），首次用三角级数研究了梁的挠度方程。1834年以后，彭赛列(J.V.Poncelet)在

巴黎一所大学讲授力学课程时，首次把剪力的影响引入梁的挠度公式之中。克莱布施(R.F.A.Clebsch)在1862年出版的《固体弹性理论》中，对于图11.3所示的梁，计算变形时想出了积分过程中不拆开括号的技巧，从而把积分常数简化为两个。与此同时，他还将这种原始的间断积分法推广应用到既有集中力又有分布载荷的梁中。

接着，出现了几种计算梁变形的半图解、半分析的方法和图解的方法。圣维南在纳维有关材料力学的讲义1864年第三版的注解里，通过悬臂梁自由端受集中力的情况，首次提出了计算梁变形的面矩法。后来，莫尔(1868年)和格林(C.E.Greene, 1873年)对这种方法作了更完整的发展。在1868年的一篇论文中，莫尔又提出了共轭梁法(亦称虚梁法或图解分析法)和图解法。

现在回到我们在本篇开头提出的问题：计算梁变形的方法有多少？

文献[11.1]列出了19种：积分法、初参数法、虚梁法、图解法、叠加法、差分法、奇异函数法、面积-力矩法、迈克勒法、逐次面积矩法、拉普拉斯变换法、三角级数法、能量法及虚位移法、导线法、剪力面矩法、常数相等法、焦点法、近似计算法、面积向量法。

如果我们将文献[11.1]提到的能量法又细分为几种方法，即卡氏定理、单位载荷法、图形互乘法等等；并作一些补充，如文献[11.2]提到的马克劳林级数法等几种方法，以及《西安交通大学学报》1981年第4期介绍的等效弯矩法，《力学与实践》1988年第4期和第6期介绍的定积分法和位移置换法，等等，那就不止19种了。即使这样，仍难免挂一漏万，例如我们看到国内一些学术会议交流的论文所

提出的几种方法，由于不便人们查找而没有列出。

总之，虽然上列种种方法中有的在某些方面存在着一定的联系或相近之处，但细分起来，计算变形的方法似可说是数以十计的。由此可见，为使梁的变形计算方便、快捷和适应性强，人们付出了多么艰巨的劳动啊！

参 考 文 献

[11.1] 胡国华，“面积向量法计算梁及刚架的位移”，《重庆大学学报》，5(1990)。

[11.2] Ш.Е.米凯拉奇，《建筑力学的若干问题》，建筑工程出版社，1956。

[11.3] S.P.铁木生可，《材料力学史》，上海科学技术出版社，1961。

[11.4] O.摩尔，《摩尔工程力学论文选辑》，上海科学技术出版社，1966。

[11.5] 高亨，《周易大传今注》，齐鲁书社，1979。

[11.6] C.Truesdell, The Rational Mechanics of Materials——Past, Present, Future, *Applied Mechanics Reviews*, 12, 2(1959)。

[11.7] S.P.Timoshenko, J.Gere, *Mechanics of Materials*, Van Nostrand Reinhold, 1972;《材料力学》，科学出版社，1978。

[11.8] 老亮，《中国古代材料力学史》，国防科技大学出版社，1991。

十二、什么事使纳维大为吃惊？

1820年，法国工程师杜洛公布了一项奇怪的实验结果：用同样的铁料制成圆形和正方形两种截面的杆状试样，进行扭转实验以测量剪切弹性模量，结果是方试样测得的值竟然比圆试样的值小了百分之十几。根据圣维南的回忆，这件事曾使他的老师纳维大为吃惊！

本来，同一种材料的剪切弹性模量，不论用圆试样还是方试样做实验，测得的数值应该基本上是一样的。杜洛却得出如此不同的实验结果，岂不是咄咄怪事吗？为什么会出现这种令人惊奇的事情呢？让我们一起来回顾一下扭转问题的有关历史，并从中寻找这个问题的答案吧！

在柱体扭转理论的发展过程中，由于圆杆使用广泛，问题也比较简单，所以首先取得了进展。

在今天的材料力学书中，圆杆扭转的应力和变形公式，是通过力的平衡、变形的几何和物理关系这三个方面的综合而同时导出的。然而，圆杆扭转问题发展的历史进程，与现在教科书里讲的推导过程并不是完全一致的。

库仑在1777年刊出的论文“关于有磁偏角的指南针”中，研究了毛发和丝线的扭转问题。在此基础上，结合扭秤的研制，1784年又宣读了“金属丝的弹性与扭力的理论和实验研究”一文（载于1787年法国科学院出版的文集）。库仑用金属丝

悬挂重物（铅质圆柱体）进行扭转振动实验，其装置如图 12.1 所示。通过对不同长度 l、不同直径 D、不同材料（铜和钢）的金属丝在不同悬挂重量下所做的一系列实验，他首先得出了在扭角 ϕ 不太大的条件下扭矩 m 与扭角之间的正确关系式如下：

$$m=\frac{\mu D^4}{l}\phi \tag{a}$$

式中 μ 为材料常数，由实验测定。

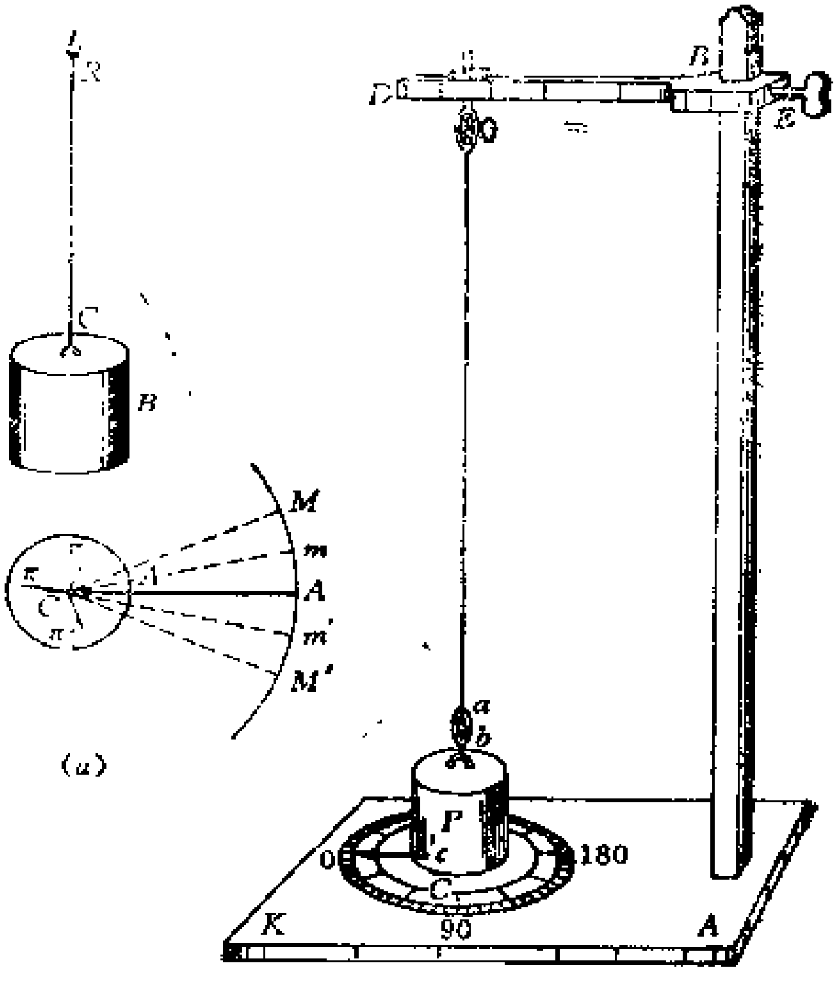


图 12.1[①]

① 此图取自文献[12.3]。

库仑测得钢丝与黄铜丝的 μ 值之比等于$3\frac{1}{3}:1$，并由此指出，当需要制造大刚度的零件(如枢轴等)时，以选用钢为好。他还发现，如果扭转变形超过了弹性范围，材料将要变硬，弹性极限便有所提高，但 μ 值保持不变。其后若经过适当的退火处理，则可以消除这种冷作硬化效应。

继库仑对扭转变形的开创性研究之后，杨讨论了圆轴扭转时的剪应力问题。他在 1807 年出版的《自然哲学与机械技术讲义》中讲到，圆轴扭转时，所施加的转矩与横截面上剪应力所构成的扭矩平衡；任一点处剪应力的大小，与该点到圆心的距离成正比，与扭角也成正比。此外，杨还指出，由于扭转，纵向纤维变成了螺旋线形，外部纤维受拉、内部纤维受压，其后果是圆轴相应缩短，并受有一个与 ϕ^3 成正比的附加扭矩[铁木辛柯《材料力学(高等理论及问题)》第 53 节讨论了这个问题，可以参考]。在工程实际中，所使用的圆轴一般由钢铁等金属制成，并且在弹性范围内工作，变形通常都很微小，所以这个附加扭矩可以略去不计；但对于橡胶之类的软材料，有时就需要加以考虑了。

此后，人们对扭转问题进行了广泛的理论和实验研究。到 19 世纪中叶，圣维南运用弹性力学的基本方程和他自己创造的半逆解法，奠定了柱体扭转理论研究的基础。在此期间，扭转实验已涉及许多种材料(如多种钢铁和铜合金，银、金、铂，玻璃、封蜡和木材，等等)，各式各样的试样(丝状或杆状；实心和空心的圆形、方形和矩形截面，以及三角形等截面)，不同的温度条件和各种加载条件(静载、冲击、振动和重复加载等)，以及多种力学性能(弹性、塑性和破断等)的测定。其中也包括上面提到的杜洛的工作。

杜洛在1820年发表了"锻铁的抗力理论与实验"一文。他假定圆杆扭转时横截面保持为平面、半径保持为直线，导出了与库仑相同的扭角公式。此外，杜洛在文中还谈到了管形截面的优点。当时，人们分析杆件扭转问题，不论截面是什么形状的，大都采用平面假设，即把圆杆扭转理论直接应用到非圆截面杆中去。现在我们都知道，这样做是错误的，因为非圆截面杆扭转时横截面发生翘曲，平面假设不再适用。上面谈到杜洛测得方杆的剪切弹性模量比圆杆的小了百分之十几，这个奇怪的结果就是由于错误地将圆杆的扭角公式滥用于方杆而引起的。

由弹性力学可知，边长为 a 的正方形截面杆件的扭角公式如下所示(在一般材料力学书上也可以查得到)：

$$\phi = \frac{Tl}{0.141a^4G} \tag{b}$$

若误将圆杆理论用于方杆，由于

$$I_p = I_y + I_z = 2I_y = 2\left(\frac{a^4}{12}\right)$$

式中 I_p 为方形对形心的极惯性矩，I_y 和 I_z 为形心主惯性矩，于是可得扭角公式为

$$\phi = \frac{Tl}{I_pG} = \frac{Tl}{\frac{a^4}{6}G} \tag{c}$$

显然，用式(b)和式(c)计算方杆的剪切弹性模量 G，就会得出不同的数值；并可得知误用式(c)算出的 G 值只有用式(b)算出的84.6%，这就是杜洛给出方杆比圆杆的"测量值"小百分之十几的原因。

被杜洛的奇怪数字所惊动的纳维，是否很快便找到解释其中奥妙的原因呢？看来他没有找到。例如，在他所编有关材

料力学的讲义1826年第一版中，并未说明基于平面假设的扭转公式的适用范围问题。

在同一期间，人们在理论上对扭转问题也作过各种各样的探讨。例如，有的学者在用弹性力学的基本方程求解具体问题时，便讨论过圆杆的扭转。一些学者对平面假设是否普遍适用的问题进行了理论上的分析，其中特别值得一提的是柯西的工作。

柯西在1829年“关于矩形杆的扭转和旋转振动”一文中，用他自己导出的弹性力学普遍方程，研究了矩形截面杆的扭转问题。他假定横截面上各点的轴向位移 u 与扭角 ϕ 之间存在如下的关系：

$$\frac{d^2u}{dydz}=\frac{I_y-I_z}{I_p}\phi \tag{d}$$

式中 I_y， I_z 和 I_p 分别表示截面的两个形心主惯性矩和对形心的极惯性矩。由此式出发，柯西得到扭矩 M 与扭角的关系式如下：

$$M=4G\frac{I_yI_z}{I_pl}\phi \tag{e}$$

式中 G 为材料常数，l 为杆件的长度。由于正方形截面的 $I_y=I_z$，从式(d)仍可导致方杆扭转时横截面不会翘曲的错误结论；但它毕竟代表了一种新的观念，即矩形杆扭转时横截面将产生翘曲，平面假设不再适用。而且，由式(e)可以得出狭长矩形截面杆的正确结果如下：

$$M=G\frac{b^3h}{3l}\phi \tag{f}$$

式中 b 和 h 分别表示矩形的短边和长边的尺寸。由于狭长矩形 $h\gg b$，在由式(e)导出式(f)的过程中引用了近似关系 $h^2+b^2\approx h^2$。式(f)在现今一般的材料力学书上可以找到。

纳维在他有关材料力学的讲义1833年第二版上，随即引用了矩形杆的柯西公式(e)，以及实际上仍然认为平面假设适用的方杆扭角公式。同时他还谈到，扭转时平面假设“不完全准确”。

在上述种种理论和实验研究的基础上，圣维南对扭转问题进行了长时期的研究。早在1839年，他在给柯西的一封信中便讨论过这个问题。及至1847年的三篇有关论文，他成功地列出了扭转问题的一般方程，并得到矩形和椭圆形截面杆的正确结果。1853年宣读、1855年刊登的关于柱体扭转的著名论文、被历代力学家誉为划时代的贡献。这篇带总结性的研究报告，详尽地讨论了扭转问题的各个方面，给出了圆形、椭圆形、方形、矩形、等边三角形……等各种截面受扭杆件的解答。

1871年前后，圣维南在一些合理假设之下，导出了塑性力学的基本方程，创立了塑性理论的基础。同时，他求得了圆轴扭转等一些简单塑性问题的解答。

自圣维南以来，柱体扭转问题的研究获得了丰硕的成果，这里就不一一叙述了。

参考文献

[12.1] 老亮，“圆杆扭转简史初编”，《力学与实践》，4 (1984)。

[12.2] I. Todhunter, K. Pearson, *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials*, Vols. I, II, Cambridge, 1886, 1893。

[12.3] S. P. Timoshenko, *History of Strength of Materials*, McGraw-Hill, 1953; 铁木生可，《材料力学史》，上海科学技术出版社，1961。

[12.4] T. J. Higgins, A Comprehensive Review of Saint-

Venant's Torsion Problem, *American Journal of Physics*, 10, 5(1942)。

[12.5] A.E.H.Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*; Cambridge, 1927; 《力学与实践》, 1、2(1985)。

[12.6] 钱伟长、林鸿荪、胡海昌、叶开沅,《弹性柱体的扭转理论》, 科学出版社, 1956。

[12.7] 威·弗·马吉,《物理学原著选读》,商务印书馆,1986。

[12.8] С.А.Бернштейн, *Очерки по истории строительной механики*, Госстройиздат, 1957。

十三、杨氏模量还是欧拉模量？

前面我们已经讨论过弹性定律的优先权问题。真是无独有偶，与弹性定律密切相关的弹性模量的概念和定义，凑巧也有个优先权的问题。

弹性模量，通常说是英国科学家杨在 1807 年出版的《自然哲学与机械技术讲义》一书中首先提出来的，所以往往又叫做杨氏模量。杨在这本书中写道："任一材料的弹性模量，是同一材料构成的一个柱体，在柱体底部能够产生一定的压力，该压力与引起柱体某一压缩度的重量之比，等于柱体长度与其缩短量之比。"① 显然，这个定义与我们现在所熟知的不同，而且颇为令人费解。

现在所用的弹性模量定义，是法国力学家纳维给出的。他在1826年出版的有关材料力学的讲义第一版中，对弹性模量下了这样的定义：单位横截面积上的载荷与所产生的单位伸长量的比值。不过，弹性模量的优先权问题，并不是发生在

① 鉴于存在似乎不尽相同的译文，为便于读者体会杨的意思，特将原文抄录如下："The modulus of the elasticity of any substance is a column of the same substance, capable of producing a pressure on its base which is to the weight causing a certain degree of compression as the length of the substance is to the diminution of its length."

杨与纳维之间，而是在欧拉与杨之间。

原来，早在杨之前80年，欧拉在1727年写的一篇手稿中，就以"模重"和"模高"的形式把这个概念引入固体力学的论著里。虽然这篇手稿延迟到1862年(欧拉死后79年)才发表，但是1766年欧拉在世时发表的另一篇论文中，又引用过并解释了这样的模量。黎卡提(J.Riccati)在1767年发表的一篇论文中也用过它。接着，1780年库仑在研究磁针的制造方法时，测定了材料的剪切弹性模量。1782年，黎卡提通过弯曲振动实验测量了关于弹性模量的一个比率。

有趣的是，杨还谈到了与欧拉所讲的模量完全相同的形式，即"模重"和"模高"。模重w和模高h与现在通用的、由纳维定义的弹性模量E有如下关系：

$$w = EA$$

$$h = \frac{E}{\gamma}$$

其中A是试样的横截面面积，γ是试样材料的重量密度。

现在，我们回过头来再体会一下杨对弹性模量所下的定义。为此，这里介绍两位教授所作的解释。

朱照宣教授在《中国大百科全书·力学》卷关于杨的传略的条目中认为：如果把杨所讲的"柱体"理解为"单位底面积柱体的重量"，则他讲的就是现在通用的定义。①

周明鹮教授在审阅本书初稿时认为：杨的意思指下式中的"EA"为模量，

① 朱照宣教授的译文与我们上面照用周明鹮教授审阅本书初稿时的译文在字句上稍有差异，看来意思是相同的。详见《中国大百科全书·力学》卷第533页。

$$\frac{EA}{W}=\frac{l}{\Delta l}$$

其中l为柱体的长度，Δl为柱体的缩短量，W相当于柱体两端所受的压力。按照周教授的意思，杨在这里把"模重"看作弹性模量了。

从优先权的角度来说，采用"弹性模量"的名词比用"杨氏模量"的名词似乎更为合适。

下面，我们转到另一个与优先权有关的问题，这就是：伽利略和马略特提出过强度理论吗？

读者或许已经注意到，在各种材料力学书中，对于最大拉应力理论（又叫做最大正应力理论或第一强度理论）和最大拉应变理论（又叫做最大线应变理论或第二强度理论）是由谁首先提出来的问题，存在着不同的记述。主要分歧在于，伽利略是否提出了第一理论？马略特是否提出了第二理论？例如，有的认为，在伽利略和马略特的年代里，尚未能确切地提出应力的概念，又怎能谈得上复杂应力状态及其强度问题呢？

的确，应力状态理论是后来逐渐发展起来的。然而，如果能提出材料破坏原因的假说，在某种意义上也可以说是提出了强度理论。那么，伽利略和马略特是否提出过这方面的假说呢？

在《两门新科学的对话》中，伽利略首先针对杆件受拉伸时的承载能力定义了绝对抗力（相当于现在讲的抗拉极限载荷 $P_b=\sigma_b A$）。在此基础上，伽利略讨论了悬臂梁自由端受集中力的弯曲问题。他不仅把杆件拉伸的绝对抗力引用到梁中，而且认为梁弯曲时也是被拉断的（当然，伽利略设想梁在弯曲时全部纵向纤维均匀受拉是错误的）。因此，有的书认为这里

包含了最大拉应力是材料破坏之原因的意思。也有的书认为，伽利略讲杆件拉伸的承载能力与横截面面积大小成正比，这里就隐含了最大正应力强度准则。

若按笔者的拙见，伽利略讨论梁的强度时，不能说完全没有涉及材料破坏原因的问题；但是，也不能说他已经明确认识和提出这样的问题。因此，与其说伽利略提出了第一强度理论，倒不如说这个理论可以追溯到他，或者说，他的论述播下了第一理论的种子，又或者说，开始有了点关于这个理论的萌芽，似乎更为恰当。

至于马略特，他有的论述与第二强度理论看来不是没有联系。例如，他说：当试样沿着它的长度方向承受拉伸时，其伸长的多少随不同的载荷而异，“最后，有一达到断裂的伸长量”。例如，“一木片伸长1/6英寸就断裂，500磅的砝码可以使它产生这样的伸长量”，“此即造成物体破坏的伸长度”。总之，在拉伸试验中，他说明当伸长量超过某一极限时材料便发生断裂。人们大概以此认为他提出了第二理论的。

若按笔者的拙见，同样不能说上列马略特的论述与破坏原因的问题毫不相干；但是，在这些论述中他也不是明确提出最大拉应变是材料破坏的原因。他只不过是描述了破坏时最大伸长的数量而已。因此，与其说马略特提出了第二强度理论，倒不如说这个理论可以追溯到他，或者说，他的论述播下了第二理论的种子，又或者说，开始有了点关于这个理论的萌芽，似乎更为恰当。

参 考 文 献

[13.1] S.P.Timoshenko, *History of Strength of Materials*, McGraw-Hill, 1953；铁木生可，《材料力学史》，上海科学技

术出版社，1961。

[13.2] J.F.Bell, *Mechanics of Solids*, Vol.I, *The Experimental Foundations of Solid Mechanics*, Springer-Verlag, 1984。

[13.3] C.Truesdell, The Rational Mechanics of Materials——Past, Present, Future, *Applied Mechanics Reviews*, 12, 2(1959)。

[13.4] 威·弗·马吉，《物理学原著选读》，商务印书馆，1986。

[13.5] 老亮，"谈谈材料力学史及其研究中的一些问题"，《国防科技大学学报》，(31985)。

[13.6] I.Todhunter, K.Pearson, *A History of the Theory of Elasticity and of the Strength of Materials*, Vols.I, II, Cambridge, 1886, 1893。

十四、材料破坏原因有新说

与一些新兴的学科分支相比，材料力学算是比较老的了。然而，老的学科分支也常有新进展，下面先举强度理论方面的一个例子。

人们比较熟识的几个常用的强度理论，都是外国人提出的。在这里，我们要介绍中国学者得出的一个强度理论。

通过三向应力圆，可以求得三个主剪应力如下：

$$\tau_{12}=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$$

$$\tau_{23}=\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2} \qquad (a)$$

$$\tau_{13}=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$$

最大剪应力理论认为，三个主剪应力中只有最大剪应力 τ_{13} 是导致材料屈服和剪断的原因。与此不同，我国学者俞茂鋐教授于1961年发表了一个新的观点，叫做双剪应力强度理论。这个理论认为，引起材料屈服的不仅是最大剪应力 τ_{13}，而且还受到中间主剪应力 τ_{12}（或 τ_{23}）的影响。从三向应力圆或者式(a)容易看出，最大剪应力的数值恒等于其他两个主剪应力之和，也就是说，三个主剪应力中只有两个是独立量。因此，双剪应力理论认为，决定材料屈服的主要因素是单元体中两

个较大的主剪应力。具体说就是，不论材料处于什么应力状态，只要单元体中两个较大的主剪应力之和 $\tau_{13}+\tau_{12}$（或$\tau_{13}+\tau_{23}$）达到材料在单向拉伸下发生屈服时两个较大的主剪应力之和$(\tau_{13}+\tau_{12})_s$，材料就发生屈服。

由于单向拉伸时，

$$\sigma_1=\sigma$$
$$\sigma_2=\sigma_3=0$$

所以

$$\tau_{13}=\tau_{12}=\frac{\sigma}{2}$$
$$\tau_{23}=0$$

于是，屈服时两个较大的主剪应力之和为

$$(\tau_{13}+\tau_{12})_s=\frac{\sigma_s}{2}+\frac{\sigma_s}{2}=\sigma_s \qquad (b)$$

按照这个假说，材料的屈服条件如下：

$$\left.\begin{array}{l} \text{当}\quad \tau_{12}\geqslant\tau_{23}\text{时，} \\ \qquad \tau_{13}+\tau_{12}=\sigma_s \\ \text{当}\quad \tau_{12}\leqslant\tau_{23}\text{时，} \\ \qquad \tau_{13}+\tau_{23}=\sigma_s \end{array}\right\} \qquad (c)$$

按通常的习惯，将上式改用主应力来表示。不难得出：

$$\left.\begin{array}{l} \text{当}\quad \sigma_2\leqslant\dfrac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\quad\text{时，} \\ \qquad \sigma_1-\dfrac{\sigma_2+\sigma_3}{2}=\sigma_s \\ \text{当}\quad \sigma_2\geqslant\dfrac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\quad\text{时，} \\ \qquad \dfrac{\sigma_1+\sigma_2}{2}-\sigma_3=\sigma_s \end{array}\right\} \qquad (d)$$

引入安全系数 n，由式 (d) 得双剪应力理论的强度条件如下：

$$\left.\begin{aligned}&\text{当}\quad \sigma_2 \leqslant \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} \quad \text{时，}\\ &\qquad \sigma_1 - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2} \leqslant [\sigma]\\ &\text{当}\quad \sigma_2 \geqslant \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} \quad \text{时，}\\ &\qquad \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} - \sigma_3 \leqslant [\sigma]\end{aligned}\right\} \qquad (e)$$

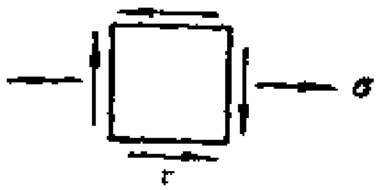


图 14.1

对于材料力学所讨论问题中常见的应力状态（图14.1），最大剪应力理论、八面体剪应力理论（即歪形能理论或第四强度理论）和双剪应力理论的屈服条件依次如下：

$$\sigma_{r3} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sigma_s \qquad (f)$$

$$\sigma_{r4} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = \sigma_s \qquad (g)$$

$$\sigma_{r双} = \frac{\sigma}{4} \pm \frac{3}{4}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sigma_s \qquad (h)$$

为形象表示这三种屈服条件的差异，并与实验结果相比较，以σ-τ坐标系画出它们的曲线，如图14.2所示。一些实验结果用圆点和三角形点表示在同一个图里，其中右边的圆点是三种软钢的实验结果，左边的三角形点是一种铝合金的实验结果。由图14.2可见，双剪应力理论与实验符合的程度要比其他两个理论更好。

上面介绍的双剪应力屈服条件，仅适用于拉伸与压缩的屈服极限相等的材料。对于拉压屈服极限不相等的材料和脆

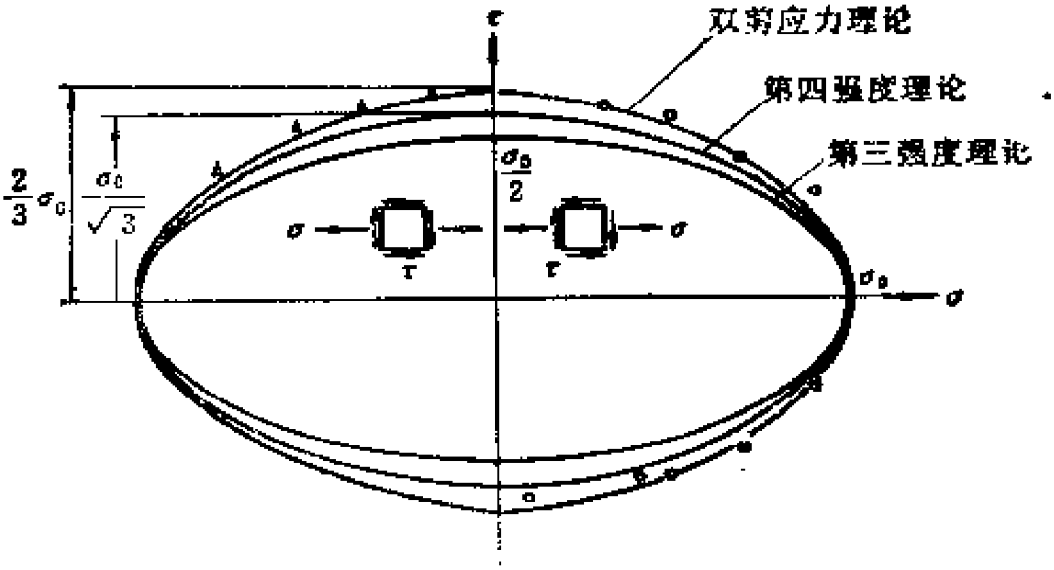


图 14.2①

性材料，俞茂鋐教授进一步给出了广义双剪应力强度理论，并与一些铸铁和混凝土的实验结果颇为符合。现在，双剪应力理论已经发展成为一系列的理论，这可详见他的论著（文献[14.1]和[14.12]）。

下面我们转到另一个话题：谈谈目前国内对于灰铸铁压缩破坏原因的争论的点滴情况。

一般材料力学书认为，灰铸铁试样压缩时断口斜面法线与轴线的夹角约成45°角，破坏是由于最大剪应力引起的。实际上，这个夹角一般大于45°，对此，不少文献，例如[14.2]、[14.3]和[14.4]等等，沿用了库仑内摩擦理论②和莫尔强度理论的解释。加之断面比较光滑，与拉断时的颗粒状不同，所以在这些解释的基础上仍然认为铸铁压缩时主要是由于剪切而断裂的。近年来，国内不少力学工作者从不同角度对传统

① 此图取自文献[14.1]。
② 若干中外文献因角度混淆而出现差错，阅读时请注意。

的解释提出异议，引起了一场争论。下面简单介绍其中几种看法。

一些文献将端部摩擦力作为剪力，通过应力分析，得知试样端部斜面上存在拉应力，并认为因此而导致拉伸破裂。文献[14.5]通过有限元分析，则认为这种拉坏的见解不能成立。

有一些文献从断裂力学的角度来探讨这个问题。

据文献[14.6]介绍，用声发射监测发现，在压缩载荷达到一定数值后，试样中心部位在最大剪应力作用面发生局部剪断，但试样并未整体破坏。从电子金相图也可以看到，断口中这一早期剪断区的形貌是三角锥状微坑花样，表明这里发生过强烈的剪切变形而成裂纹。这个早期剪切裂纹可看作内埋倾斜椭圆片状裂纹，在继续加压下，到最后使试样处于全复合型受载条件而失稳断裂(文献[14.7]又用边界元法进行了分析)，这时就不再是单纯的剪切破坏了。由电子金相图可见，断口的失稳断裂区上有河流状花样和舌状花样，这是解理断裂的典型特征，而解理断裂一般总是脆性断裂。

文献[14.8]从压缩试样产生如图 14.3 *a*和*b* 所示的偏斜变形和鼓状变形出发，用有限元法分析了这样变形情况下的应力场，得知试样纵截面上存在拉应力。于是认为破坏分为三个阶段：由剪应力作用产生永久变形，从而使试样改变了形状；由此产生侧向拉应力并引起裂纹；最后由裂纹扩展而致破坏。

文献[14.9]认为，试样在发生偏斜变形和鼓状变形后处于剪切和压弯组合的受力状态。由实验看到试样首先在腰部表面出现与轴线大约成 30°的裂纹，被认为是张开型的，由最大拉应力引起。随着压力加大，裂纹的扩展则是张开和剪切的复合型。文献[14.10]进而认为，断口分为拉断或剪断的

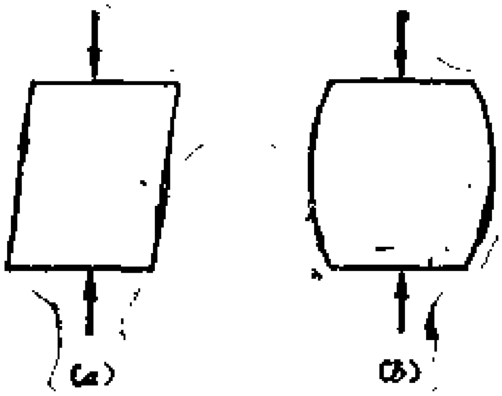


图 14.3

三个区域，并提出一个假设来分析变形和破坏的过程。

此外，文献[14.5]也分析了鼓状变形问题，但得出了传统的观点并无错误的结论。

参与这个问题讨论的还有不少，这里就不一一列举了。看来讨论还会继续进行下去[14.11]。

参考文献

[14.1] 俞茂鋐等，《双剪应力强度理论研究》，西安交通大学出版社，1988。

[14.2] 黎邦隆、老亮，《力学》，湖南科学技术出版社，1985。

[14.3] 陈森、杜耀星，《材料力学答疑》，福建科学技术出版社，1986。

[14.4] 冯广占，《材料力学答疑》，高等教育出版社，1988。

[14.5] 李中华、韩江波、杨仲民、匡震邦，“铸铁单向压缩破坏分析”，《力学与实践》(文集)，北京大学出版社，1988。

[14.6] 张永元，“铸铁压缩试样断裂模型和断裂机制的研究”，《第五届全国断裂学术会议论文集》，第三册，1988；*Engineering Fracture Mechanics*, 32, 6(1989)。

[14.7] 张永元、罗钢明、王永坚，“具有椭圆片状倾斜裂纹受压柱体的边界元分析”，《第五届全国断裂学术会议论文集》，第一册，

1988; *Engineering Fracture Mechanics*,33,4(1989)。
[14.8] 何蕴增，“对脆性材料单向压缩试样发生侧倾后‘侧张’破坏过程的分析”,《应用科技》,2(1990);“对脆性材料单向压缩试样发生鼓形变形后‘侧张’破坏过程的分析”,《力学与实践》,6(1991)。
[14.9] 袁名钟、张图云，“灰铸铁压缩试样受力模型及表面裂纹产生机理的探讨”，《贵州工学院学报》，1(1988)。
[14.10] 张图云、袁名钟，“对灰铸铁压缩试样的变形及倾斜断口形成过程的探讨”，《贵州工学院学报》，2(1991)。
[14.11] 韩文年、马长培,“铸铁压缩破坏的端面试验研究”，《力学与实践》,2(1993)。
[14.12] 俞茂鋐,《强度理论新体系》,西安交通大学出版社,1992。

十五、从疲劳、断裂到损伤

在本篇里，我们主要来谈人们同低应力脆断现象进行斗争的简要历史。其中，涉及到与材料力学有关的一些新近发展起来的学科。

我们知道，材料力学所研究的是由均匀、连续物质制成的构件在外力作用下变形和破坏的规律。材料力学的强度设计准则认为，从构件危险点上的工作应力 σ_1、σ_2、σ_3 算出强度理论的相当应力 $\sigma_r(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$，只要满足强度条件

$$\sigma_r \leqslant [\sigma] \qquad (a)$$

构件就应当是安全的。这里，许用应力 $[\sigma]=\sigma_0/n$，σ_0 是材料的危险应力。对于脆性材料，σ_0 为断裂应力；对于韧性材料，σ_0 取屈服应力 σ_s 或条件屈服应力 $\sigma_{0.2}$。n 是安全系数，它的作用是考虑人们对计算模型的简化不一定准确，以及对构件的安全度应留有余地。

对于韧性材料，断口附近总会有较大的塑性变形区，比如软钢拉断前的颈缩区，这类材料的延伸率 $\delta>5\%$，应当选用第三或第四强度理论。按式(a)设计出的构件，已留有一定的剩余强度，应当能够保证构件的安全。然而，对于延伸率比5%大得多的一些材料，在某些条件下，却有突然发生脆性断裂的情况，断裂前并未出现明显的塑性变形。佛克脱(W. Voigt) 很早就发现这种不能用强度理论解释的现象，布里

奇曼(P.W.Bridgman)也发现了强度理论无法说明的压裂效应，但首先促使人们重视韧性材料低应力脆断现象的是疲劳问题。

《圣经》里讲了一个有趣的神话故事：约书亚的军队用吹起羊角号和大声呼喊的办法，使古城杰里科的城墙倒塌了。①现代一些学者试图从力学的角度来解释这座城墙塌陷的原因。有的认为，这种破坏类似于现代飞机发动机所造成的声振疲劳；或者说是由声波引起的共振所致。但也有的书对此持否定态度。②

不管怎样，人们大量遇到疲劳破坏应是工业革命以后的事。工业革命中发明了蒸汽机并用于铁路机车(1825年)和航海交通。机车、船舶、桥梁上的高速运动和受振动部件，发生过许多偶然意外事故。这里我们举几个例子。1830年3月19日，700多人站在美国蒙特罗斯吊桥上看划船比赛，由于一根主链条断裂使许多人丧命。1860至1870年，英国因车轮、车轴、轨道断裂发生出轨事故造成的死亡人数，平均每年达200人。又如1887年中，4月20日因拉杆断裂事故伤亡5人；5月27日车轮破裂使6人伤亡；6月23日路轨断裂、7月2日又发生车轴断裂，均造成严重的铁路事故。这些零部件作静载强度试验是完全合格的，但是在交变应力下工作一段时间之后便发生突然断裂，断裂时的应力远低于静载破坏应力。

低应力脆断事故层出不穷，引起了各国学者的广泛注意和研究。1829年，德国阿伯特(Albert)首次指出，重复加

① 见《约书亚记》第六章第二到六节。

② 例如，雅罗斯拉夫斯基，《圣经是怎样一部书》，生活·读书·新知三联书店，1988年。

载下破坏形式不同于静载破坏形式。1839 年，法国彭赛列在一次通俗讲演中，形象地给这种交变应力下破坏的现象取名为“疲劳”。当时的理论以为，材料久用脆断是由于结晶变化或其抗拉强度降低所致。1841 年，兰金(W.J.M.Rankine)研究了机车轴的疲劳断口。1849 年，麦克尼尔(J.E.Mc Connell)发表了“铁道车轴”的论文。1864 年，英国费尔贝恩(W.Fairbairn)创制第一台杠杆式疲劳试验机，研究了桥梁构件所受的交变应力。1847 到 1871 年，德国沃勒(A.Wöhler)在法兰克福研制出第一台弯曲疲劳试验机，对克鲁伯公司和弗尼克公司铸造的火车钢轴进行了系统的实验，并于 1863 年发表了表征钢材疲劳性能的应力幅-循环次数曲线(S-N曲线)，实验中应力循环次数已达到1.6×10^7次。1886 年，慕尼黑材料试验所主任包辛格(J.Bauschinger)分析了沃勒的实验，引入疲劳极限(持久限σ_R)作为交变应力下材料破坏的抗力指标，打下了研究疲劳问题的实验基础。到本世纪 50 年代，已提出过不少疲劳判据，疲劳研究也逐渐形成为材料与工程科学的一个重要的领域。

现在人们已经认识到，疲劳破坏可以分为三个阶段：生核阶段——在应力集中的高度局部化塑性变形区萌生出只通过一两个晶粒的微裂纹，微裂纹在交变应力下逐渐扩展，演变为微小的宏观初始裂纹，其尺寸在 10^{-10}～10^{-14} m的范围之内。第二阶段是宏观裂纹的扩展和传播，裂纹尺寸发展可达到 10^{-4}～10^{-1} m 的范围，这就大大地减小了截面的完整性，降低了构件的承载能力。当剩余的净截面削弱到不足以抵抗外力时，发生突然的瞬时脆断，这就是疲劳破坏的第三阶段。

人们研究过断口的各种金相学特征，提出了材料力学中

的疲劳校核方法。这就是，把危险应力降低为持久限σ_R，对于钢材$\sigma_R \approx (0.4 \sim 0.6)\sigma_b$，对于铝合金$\sigma_R \approx (0.25 \sim 0.5)\sigma_b$，同时要求疲劳安全系数高于静载安全系数。人们还发现，影响构件疲劳寿命的因素非常复杂，比如载荷谱的类型、性质、频率、应变速率和加载次序；构件的形状和尺寸大小；应力分布状态；表面光洁度和冷、热处理状态；平均应力和平均应变的大小；有无腐蚀和辐射的环境；有无残余应力和残余应力的正、负值；加工的历史……等等。为了提高构件抵抗疲劳破坏的能力，人们又总结了各种零部件在细节上的设计经验，提出一些工艺处理上的要求，并通过大量实验给出了各种因素对持久限影响的修正系数和经验曲线。

然而，疲劳研究仍是一门以实验为基础的经验科学，对于许多重要的疲劳问题一时还找不到公认的答案。举例来说，如何建立复杂应力状态下交变应力的强度理论？材料力学中提供的S-N曲线，是恒定应力幅下谐变载荷的实验结果，那么，在变应力幅、甚至随机的非定常交变载荷下，其疲劳判据又如何？疲劳损伤是如何累积的？……等等。因此，至今仍然不断发生一系列重大的疲劳破坏事件。

在追求轻质、高强的航空工业中，事故尤其突出。1954年，英国两架"彗星"号大型喷气式客机接连失事。按照设计寿命应为10万小时，而失事时仅仅飞行了5000小时。有关的公司搜集失事飞机的残片重新拼合，查明两架飞机的破坏都是由于气密舱窗口处铆钉孔边缘的微小裂纹发展所致。1969年12月，美国F-111战斗机在训练中一次俯冲拉起时，因左翼突然折断而失事。这是由于机翼大梁热处理不当而出现裂纹所引起的。苏联图-114飞机在巴黎航空表演中，美国C-5A运输机，以及我国直升飞机的旋翼，也发生过类似的

破坏。

低应力脆断事件不仅在各种飞机上时有发生，而且在航海、桥梁、锅炉、宇航压力容器研制等工作中，也有许多记载，其中有的并非疲劳问题。比如在桥梁方面，1938～1940年，① 比利时记录了14起桥梁破坏事故，其中不少是焊接空腹桁架结构的低温脆裂，破坏起始于焊接缺陷。1950年，加拿大魁北克焊接桥发现裂纹，局部修补后于1951年进行了复查，在作出"桥梁状态完好"的结论之后第三天，桥梁便断成三截。1962年7月，澳大利亚墨尔本帝街桥在1.2℃下脆断，原因是构件有裂纹。1967年12月15日，美国西弗吉尼亚州波因特普莱森特拉杆吊桥因为一个节点拉杆吊环下缘脆断而突然倒塌，事前毫无预兆，死亡46人。又如船舶方面，美国在第二次世界大战期间制造货轮5000艘（自由轮、胜利轮等），到1946年为止的统计，已发生1000多起脆性破坏事故，在1942到1952年间报废了238艘，其中至少有16艘断为两截，断裂多从舱内尖角区或舷板直角切口处开始。1960到1965年又有10次舰艇脆断事故发生。1972年，有关于"M.R.英格拉姆"号油轮脆断成两截的报导。

至于压力容器和管道的低应力脆断，更是屡见不鲜。1866年英国的统计表明，每年发生50至60起锅炉爆炸事件。1898年12月13日，纽约大贮气罐爆炸。1913年，美国波士顿高压水管爆炸。1919年1月，波士顿大糖浆罐爆裂，涌出230万加仑糖浆，淹死12人和一些马匹，伤40余人，冲坏了房屋和架空铁路。1947年，苏联一个4500m^3的大石油罐在－43℃下脆裂成两半。50年代，美国俄亥俄州一个高12m、直径25m

① 一说1947～1950年。

的圆柱形煤气塔和三台直径 17m 的液化天然气罐低应力爆炸，死亡 128 人，损失 680 万美元。压力容器低应力脆性破坏最突出的事例要算固体火箭发动机壳体的水压爆破了。1950 年，美国研制核潜艇上使用的北极星固体导弹壳体，它的直径 1.37m，壁厚 5mm，材料是 D6AC 超高强度钢，价值 200万美元。水压时低应力脆性爆炸，容器像摔破陶土罐似地裂开成许多碎片，断口上没有明显的塑性变形痕迹，爆破应力不到屈服限的一半。民兵固体导弹发动机，直径 1.67m，价值 180 万美元，也发生过类似情况。1963 年，试验航天用的巨型固体发动机壳体，直径 6.6m，壁厚 19mm，材料是 250 号 18Ni 马氏体时效钢，$\sigma_s = 1655$MPa，由于焊接缺陷引发低应力脆性爆破，爆破内压仅为 0.69MPa，远小于设计值 6.62MPa。1963 至 1964 年，阿波罗液体火箭发动机燃料贮箱，由于四氧化二氮和甲醇的应力腐蚀开裂，也导致严重的低应力爆破事件。以上种种焊接结构的低应力脆性破坏，大都是由于微小的、类似于裂纹的焊接缺陷引起的。制造过程中由于这些缺陷尺寸太小、取向不利或属于闭合状态，因而无损检测时发现不了或被漏检，于是便成了导致低应力脆断的潜在危险。

为了抵抗脆断、保证结构的完整性，各国纷纷进行了有组织的系统研究。例如，美国海军研究所从 1950 到 1975 年，用了25年时间，耗资一亿美元以上，对焊接金属结构的脆断问题进行了系统而深入的研究。英国从 1954 到 1965 年也投入巨资，研究整架飞机和每个重要部件的疲劳和断裂问题，建立了整机的疲劳试验设施。1958 年，美国成立了以美国材料试验学会（ASTM）为中心的“高强度材料脆性破坏特别委员会”，……等等。深入的研究使人们逐渐认识到，在实际构件

材料中不可避免地存有各种缺陷，诸如冶金中的夹渣和气孔，焊接、淬火、冷加工、表面处理时带来的工艺缺陷，使用后的表面划伤，腐蚀或疲劳引起的微裂纹等等，即使经过无损检测筛选，仍有漏检或查不出的缺陷。设计人员逐渐意识到，构件上存有某种裂纹这一事实并不可怕，只要能在此裂纹尚未突然扩展之前就发现它并采取维修措施，或者在构件安全寿命期间把裂纹尺寸控制在允许范围之内，使它不致突然扩展而导致灾变。这样就带来了一种新的设计思想——“破损-安全设计”，即允许构件破损而仍然能够保证安全。这种新设计思想的理论基础，就是断裂力学（fracture mechanics）。

断裂力学修正了材料力学中构件由均匀、连续、无缺陷的材料组成的假设，而认为构件是有缺陷的，它们带有一个或若干个典型缺陷——尺寸有限的宏观裂纹；在裂纹以外的其余部分，则仍然是均匀、连续的材料。因此，仍旧可以采用线弹性力学或弹塑性力学进行分析，以便求出裂纹尖端附近的应力场、应变场和位移场，找出控制这些场的力学参数。断裂力学要回答这样一些问题：预估构件在给定的工作载荷下，究竟能容许存在多大的裂纹而又可以保证结构的完整性？裂纹从初始尺寸扩展到危险尺寸需要经历多长的时间？在预定的寿命期限内，允许构件的最小尺寸有多大？为确保安全，时隔多久就要进行检测和预防性维修？要解决上述这些问题，其前提是找出控制裂纹扩展的参数，给出裂纹失稳扩展的判据。为说明这一点，我们简要介绍一下断裂力学的发展历史。

1921年，格里菲思(A.A.Griffith)首先研究了玻璃脆断应力与穿透裂纹尺寸之间的关系。对于无限大平板受远场拉应力作用，板内存在一个长度为$2a$的穿透裂纹的情况，他

假定拉应力作用下板内存贮的弹性应变能，在裂纹扩展时转化为产生新的开裂表面所必需的表面张力功 Y。于是得出：

$$\sigma_f = \left[\frac{2YE}{\pi a(1-\nu^2)}\right]^{1/2} \quad (b)$$

式中σ_f是使裂纹扩展所必需的外加应力，即是使裂纹扩展所需的驱动应力；E和ν分别是材料的拉伸弹性模量和泊松比，Y是引起单位开裂表面积所消耗的功。

1948 年，奥罗万(E.Orowan)修正了上述格里菲思的关系式，使它既能适用于脆性材料，又能适用于裂纹前缘产生微小塑性变形区的韧性材料(叫作准脆性断裂)。他使表面功项 Y 里包含断裂过程中裂纹尖端产生小塑性变形区所引起的能量损失。实际上，这个附加塑性功项比表面功要大 2 到 3个数量级。格里菲思-奥罗万公式的主要难点是，直接测定开裂损耗功 Y 很不容易。

1957年，欧文(G.R.Irwin)指出，测定外载在试样内所存贮弹性变形能中被裂纹扩展所释放的那一部分更为方便，这只需记录某种载荷-位移变化曲线就可以实现。于是，用 G_{I} 取代式(b)中的 $2Y$ 项，便得到裂纹扩展的驱动应力为

$$\sigma_f = \left[\frac{G_{\mathrm{I}}E}{\pi a(1-\nu^2)}\right]^{1/2} \quad (c)$$

定义G_{I}为材料断裂时的能量释放率或裂纹扩展力，它具有单位长度上的力的量纲。欧文证明，G_{I}与材料的"应力强度因子"K_{I}之间有如下的关系：

$$K_{\mathrm{I}} = \left(\frac{G_{\mathrm{I}}E}{1-\nu^2}\right)^{1/2} \quad (d)$$

应力强度因子K_{I}是标量，具有力·(长度)$^{-3/2}$的量纲[见下面式(f)]。线性弹性力学证明，在无限大平板中有一条长$2a$的穿透裂纹，并在无限远处受拉伸应力σ作用，板内距裂纹

尖端为 r、与裂纹面夹角为 θ 处的单元体 $dxdy$ 上，作用的应力为

$$\sigma_{ij}(r,\ \theta)=\frac{K_{\rm I}}{\sqrt{2\pi r}}f_{ij}(\theta) \tag{e}$$

其中 $f_{ij}(\theta)$ 是 θ 的显函数，而应力强度因子 $K_{\rm I}$ 与位置 r、θ 无关，它控制着裂纹尖端附近的弹性应力场和应变场。把式 (d) 代入式 (c)，可求出

$$K_{\rm I}=\sigma_t\sqrt{\pi a} \tag{f}$$

由此式可见，如果已知 $K_{\rm I}$，则裂纹长为 $4a$、$\sigma_t=\sigma$ 的应力场，与裂纹长为 a、$\sigma_t=2\sigma$ 的应力场是相同的。当 $K_{\rm I}$ 值很高时，要想使裂纹扩展，就必须加上很强的应力场；当 $K_{\rm I}$ 值很低时，裂纹便容易扩展。因此，可以把 $K_{\rm I}$ 看作一个控制裂纹扩展的材料参数，它反映材料忍受缺陷或抵抗断裂的能力。对于每一种线弹性材料，存在着应力强度因子 $K_{\rm I}$ 的一个临界值 $K_{\rm Ic}$，一旦

$$K_{\rm I}\geqslant K_{\rm Ic} \tag{g}$$

裂纹就会突然扩展。$K_{\rm Ic}$ 叫作材料的线弹性断裂韧性，其测试方法可参照我国国家标准 GB4161-84、美国标准 ASTM-E-399-83、英国标准 BS5447：1977。如果构件中的裂纹尺寸 a 小于由 $K_{\rm Ic}=\sigma_t\sqrt{\pi a_c}$ 所决定的临界尺寸 a_c，则裂纹是稳定的，不会突然扩展；一旦 σ_t 使 $a\geqslant a_c$，就会由于裂纹失稳扩展而引发危险的脆性断裂。以上式 (b) 到 (g) 只适用于无限宽板中含穿透裂纹，承受垂直于裂纹面的远场应力 σ 作用的情况，通常称为“张开型”或 I 型裂纹。

当远场应力象推一叠扑克牌那样平行于裂纹面作用时，就称为面内剪切开裂或“滑开型”（II 型）裂纹。如果象用剪刀沿裂纹面剪开平板那样施加外力，则称为面外剪切开裂或

"撕开型"（Ⅲ型）裂纹。对于这些裂纹，或者非穿透的表面裂纹，含裂纹的有限尺寸构件，以及倾斜裂纹和弧形弯曲裂纹等问题，都可以从已知裂纹的形状尺寸，构件的几何形状和工作应力，用弹性力学方法求出控制裂纹扩展的应力强度因子如下：

$$K_i = C\sigma\sqrt{\pi a}, \qquad i = \text{I}, \text{II}, \text{III} \tag{h}$$

其中 a 是裂纹尺寸的某种近似测度，σ 是与 K_i 相对应的名义工作应力，即控制裂纹尖端受力状态的远场应力，C 与裂纹和构件的形状尺寸有关，其具体函数表达形式可从断裂力学教科书或应力强度因子手册中查出。上述这些情况可用式 (g) 一类条件作为裂纹扩展的判据。

应当强调的是，以上一些公式只适用于裂纹尖端塑性区尺寸非常小（远远小于裂纹尺寸和截面上剩余未开裂部分的尺寸）的情况。因此，只能预估裂纹尖端处于线弹性应力场的大型构件中存在小裂纹的危险性，适用于脆性材料或韧性不高的金属材料(如某些超高强度钢)。然而，实际上常用的大部分金属结构则选用韧性较大的材料，其裂纹尖端存在较大的塑性区域。由式 (e) 可以看出，在 $r\to 0$ 的裂尖点附近，$\sigma_{ij}\to\infty$，这种应力奇异性是采用线弹性力学进行分析的结果。实际上，当 σ_{ij} 随着 r 减小而升高时，裂纹尖端处的材料不可避免地进入非弹性状态，因此，必须研究考虑塑性的断裂力学问题。

1960 年，英国研究人员以达格代尔（D.S.Dugdale）等人的工作为基础，发展了一种适合于韧性材料的断裂力学方法——裂纹张开位移法(简称COD法)。① 这种方法认为，裂

① COD是crack opening Displacement的缩写。

纹前缘的张开位移δ达到某个材料的临界值δ_c时，裂纹便开始扩展。同K_I的概念相近，可从弹塑性力学算出裂纹张开位移δ，它也是工作应力、裂纹和构件尺寸形状的函数。裂纹不稳定扩展的判据如下：

$$\delta \geqslant \delta_c \tag{i}$$

δ_c是材料的临界COD值，其测试方法可参照我国国家标准GB2358-80、英国标准BS5762:1979。

1968年，赖斯(J.R.Rice)建议了另一种弹塑性断裂力学参数，叫作J积分。它得自哈钦森(J.W.Hutchinson)、赖斯和罗森格林（G.F.Rosengren）对裂纹尖端弹塑性场奇异性的研究，是一个围绕裂纹尖端的、与积分路径无关的回路积分，适用于裂纹尖端大范围塑性区的韧性断裂分析。J积分也与外部作用力、裂纹形状尺寸有关。如果

$$J \geqslant J_{Ic} \tag{j}$$

裂纹便开始扩展。J_{Ic}是表征材料弹塑性断裂韧性的J积分临界值，其量纲与裂纹扩展力G_I相同，测试方法可参照我国国家标准GB2038-80、美国标准ASTM-E-813-81。虽然把J积分作为控制断裂行为的参数是一种近似方法，但已被推广应用于研究金属材料高温下的蠕变断裂和聚合物材料的粘弹性断裂。

根据裂纹尖端塑性区的尺寸，把断裂力学区分为线弹性断裂力学和弹塑性断裂力学。根据作用载荷的时间特征，又可以把断裂力学区分为断裂静力学和断裂动力学，后者的计算模型，要考虑加载变形和裂纹扩展时运动所引起的惯性效应，甚至要考虑非弹性变形的热效应。裂纹尖端材料所处的实际物理状态十分复杂。远离裂纹的广大区域（构件的绝大部分）一般处于线弹性状态，而非弹性区围绕着裂纹尖端，它

由塑性区内包容着一个物理状态更为复杂的过渡损伤区所组成。裂纹扩展是依照线弹性规律脆断，还是依照弹塑性规律韧断，取决于下列一些因素：裂纹尖端局部材料所处的物理状态及其相对区域尺寸的大小，材料性质的比值 K_{Ic}/σ_s 和试样的厚度，以及构件在工作环境(温度和介质)影响下非弹性变形区的性态，等等。深入研究裂纹尖端非弹性区的行为，是断裂力学的基础课题之一。

导致大型结构破坏的薄弱环节，往往就在微小缺陷附近。当其位置处于高应力区时，显然更加危险了。我们中国人的祖先，对这个问题早有察觉。在《韩非子》、《淮南子》、《抱扑子》、《商子》、《易林》、《鬼谷子》……等古籍中，都有一些定性的论述。比如，晋代刘昼在《刘子·慎隟(xi，同"隙")》中作了这样的归纳："墙之崩隤(tui，坠落)，必因其隟。剑之毁折，皆由于璺(wèn，裂纹)。尺蚓穿堤，能漂一邑。"这段古话的意思是说：墙的倒塌是因为有缝隙，剑的折断是因为有裂纹，小小的蚯蚓洞穿大堤，会使它崩溃、淹没城市。

断裂力学的发展，从概念上革新了工程师们选择材料的依据，使他们不再盲目地追求超高强度而忽视断裂韧性。因为增加钢材强度时，会有降低韧性的倾向。设计师要求供应毫无瑕疵的理想材料，希望生产出不含微小缺陷的构件，都是不现实的。即使造出了"毫无缺陷"的构件材料，以后也难免在工艺或使用的过程中引起损伤。因此，选择材料时，要审慎地选取适当的强度指标σ_s和韧性指标K_{Ic}，使之配合得当，才能达到防止断裂的目的。例如，可用比值K_{Ic}/σ_s来控制板材抵抗脆性断裂的能力。钢、铝、钛的K_{Ic}/σ_s值分别为0.400、0.353、0.572，因而钛的韧性最好，其裂纹被控制在弹塑性范围中，不会脆断。早期的固体火箭壳体，所

用材料的σ_s=1655～1931MPa，但比值K_{Ic}/σ_s仅为0.3左右，其$a_c\approx2$mm，因而容易产生平面应变脆性断裂。后来把σ_s的要求降低到1310～1570MPa，这样，比值K_{Ic}/σ_s就升高到0.45左右，其$a_c\approx36$mm，从而消除了低应力爆破事故。现在，飞机设计已接受了断裂力学的破损-安全设计思想。1972年，美国空军标准MIL-Sid-1530在飞机结构完整性大纲中要求，设计飞机时除了按传统的静载极限设计进行校核以外，还必须按断裂力学观点进行分析。这种思想推进了飞机的维护制度，有效地保证了飞行安全。1972年以后，美国压力容器研究委员会(PVRC)制订的ASME锅炉和压力容器规范，在有关原子能发电厂设备的附录中，也列入了防止脆性破坏的要求。1974年，美国国家公路运输同业协会(AASHTO)，在桥梁设计中也增补了对桥梁钢材切口韧性的技术要求。压力容器的设计师们，按照断裂力学的观点提出了"破裂前渗漏"准则，使容器上表面裂纹扩展到穿透时，只发生渗漏而不会马上触发不稳定扩展。这对于及时维修无公害性介质的容器是有利的。我国劳动人事部也很重视压力容器评定规范的研究，以便采用断裂力学的观点评定缺陷对压力容器完整性的影响，更合理地制订工艺和检验规范。

断裂力学为疲劳问题提供了一种理论基础，有力地推动了疲劳研究的进展。因为交变应力作用下的疲劳破坏，是从细小裂纹萌生和稳态扩展开始的。整个构件所承受的应力场虽然处于弹性范围之内，而裂纹尖端不可避免地出现微小非弹性变形区，正是这种微小非弹性变形区内裂纹的扩展规律，决定了疲劳缺陷的发展和构件的使用寿命。疲劳裂纹的扩展是一种渐进的过程。由于裂纹尖端的应力场处于交变状态，对

应的应力强度因子K_{I}也在一个变程范围ΔK_{I}中交替变化，每次循环中裂纹向前扩展的速率为

$$\frac{da}{dN}=f(\Delta K_{\mathrm{I}}) \tag{k}$$

帕里斯(P.C.Paris)在1962年给出了$f(\Delta K_{\mathrm{I}})$的具体形式如下：

$$f(\Delta K_{\mathrm{I}})=C(\Delta K_{\mathrm{I}})^{\lambda} \tag{l}$$

其中C和λ是材料常数。在$\log(\Delta K_{\mathrm{I}})$和$\log(da/dN)$的双对数坐标轴上整理实验数据，表明式(l)是一条折线，它有一到两个拐点。后一个拐点对应着使裂纹更快扩展的门坎值ΔK_{cr}，λ值在3～6之间变化。对式(l)的裂纹扩展速率da/dN进行积分，就能求出材料的寿命。当然，深入研究裂纹扩展速率，必须采用弹塑性断裂力学的方法，目前这方面正受到工程界的注意。

然而，有不少低应力脆断的现象和问题，不一定都能用断裂力学的方法来解释和解决。在核电站的液态金属快反应堆里，主级热交换系统中的工作物质是液钠，其工作温度为540℃。次级热交换系统中的高压蒸汽，常年温度保持在510℃。这两级热交换器被密封在高压容器中，从核反应堆启动后到全寿命期间要不停地工作。普通热电厂中的高压蒸汽，温度在538～565℃的范围，其零部件也不允许发生破坏。然而，长期处在高温、高压条件下工作的零部件，总会产生蠕变，并发生危险的低应力蠕变脆断。这种断裂过程不同于疲劳和断裂力学中所见的情况，它是在晶界上首先产生许多细小的孔洞或楔状裂纹，使整个部件横截面上形成分布的缺陷场，促使材料疏松、晶粒解理，微缺陷逐渐聚集为宏观裂纹，最后导致脆性断裂。断口上没有明显塑性变形。这

不同于弹塑性力学研究的高应力蠕变破坏，后者是跨晶滑移，属于塑性变形很大的韧性破坏（产生颈缩）。低应力蠕变脆断是分布孔隙的演变聚集过程，也不像单个裂纹扩展时可以采用断裂力学进行分析。分布孔隙的产生和演变，会显著地改变材料的刚度，即降低弹性模量和使泊松比变化，造成材料应变软化失效。岩石、混凝土、陶瓷、粉末冶金制品，往往是多孔介质，受力后内部会产生许多微小裂纹，其应力-应变曲线呈现出应变软化现象。压力加工下经历大塑性变形的钢材，软钢、紫铜拉伸破坏前的颈缩区内，都可发现许多细小的孔隙。固体火箭推进剂是一种橡胶基体、固体颗粒高度填充的复合材料。在长期存贮过程中，由于受力、湿和热的循环作用以及化学老化作用，使颗粒与基体之间产生大量孔洞和缝隙，这叫作脱湿损伤。损伤聚集所产生的裂纹长达数十厘米，点火后可能引起火箭爆炸或弹道偏离。层合纤维复合材料已广泛用于飞机、火箭结构，其破坏过程有较复杂的机制。受力后往往首先在聚合物基体内引起许多垂直于纤维的细小裂纹（叫作银纹），以后部分纤维断裂，银纹发展成纤维基体界面上的脱胶，出现一些平行于纤维的小裂纹。在以上各种损伤发展过程中，层板内部应力不断重新分布，层板之间出现了局部分层点。每种缺陷的发展，都改变着复合材料的总体刚度，未必会出现能用断裂力学方法处理的典型宏观裂纹。因此，人们认为复合材料的破坏过程是一种损伤的发展和演变的过程。所有上述种种微缺陷场所造成的破坏现象，不同于疲劳和断裂，统称为损伤现象。

1958 年，苏联卡查诺夫（Л.М.Качанов）首次引入简单的“损伤变量”来描述高温蠕变所造成的损伤场。设简单拉伸试样的初始横截面面积为A_0。由于某种机制在截面上引起损

伤后，瞬时的表观面积为 A。此时横截面上孔隙的总面积为 A_ω，净承载面积为 A_{eff}，所以 $A_\omega + A_{eff} = A$。用 $\omega = A_\omega/A$ 代表“损伤因子”。初始无损伤时，$A_\omega = 0$，$A = A_0$，$\omega_0 = 0$；当横截面上损伤布满整个截面即达到极限状态而断裂时，$A_{eff} = 0$，$A = A_\omega$，$\omega_R = 1$。任何时刻的表观真应力 $\sigma = P/A$，其中 P 为试样所受的轴力。此时有效面积上的净应力 $s = P/A_{eff}$，称为有效应力。由于 $A_{eff} = A - A_\omega$，所以有

$$\omega = 1 - \frac{\sigma}{s} = 1 - \frac{A_{eff}}{A} \tag{m}$$

由此可见，可以用应力增量 $s-\sigma$ 与有效应力 s 之比，或用有效面积 A_{eff} 与表观面积 A 之比来描述损伤。

1977 年，瑞典哈特（J.Hult）证明，可以用初始模量 E_0 与损伤软化后的模量 E_ω 之比来描述损伤，即

$$\omega = 1 - \frac{E_\omega}{E_0} \tag{n}$$

从而为测试损伤提供了另一种手段。

1980年，由于能源和核电工程的促进，法国、日本、美国的一些力学家提出了“损伤力学”(damage mechanics)的概念，其目的在于研究上述种种损伤现象。把损伤解释为材料内部分布的缺陷场，随着变形而演化、发展，造成材料的软化、劣化，使结构中内力重新分布，改变材料的应力-应变关系，最终导致破坏的过程。把损伤的发展过程看作一种热力学上不可逆的能量耗散过程。由于损伤孔隙数目众多、形状各异，不可能像断裂力学那样对它们一一作出几何描述和分析。并且认为，即使作出精细的运动学描述，也会由于细观描述与宏观现象的尺度差异，而难于应用到工程问题上。因此，各国力学家引入“损伤变量”来笼统地描述损伤，在数

学上把损伤变量取作标量、矢量或张量的形式，在物理上把损伤变量看成一种热力学内变量，代表物质微结构不可逆的劣化，用不可逆热力学和连续介质力学的方法建立损伤的发展演变方程，给出它们对应力-应变关系和材料弹性常数的影响，拟合受损伤材料的实验数据，以便对损伤构件进行应力分析。

损伤力学与断裂力学有密切的联系。一方面，宏观裂纹是由更细小的孔隙或缺陷聚集演变面成，比如疲劳裂纹的生核、稳定扩展过程所经历的时间，只占总寿命的 20% 左右，疲劳寿命的主要部分，被细观的损伤积累过程所控制。另一方面，材料裂纹尖端的非弹性变形区，本身就包容着一个损伤区，它使弹性区对塑性区变形的约束作用得到松弛，减小了裂纹尖端处材料的有效刚度，使该处材料能沿厚度收缩，诱发大范围塑性屈服。因此，对于研究控制脆性断裂的裂纹尖端非弹性区材料的性态，损伤力学应当是有所裨益的。至于软化-疏松-崩碎的脆断过程，更难采用断裂力学描述，只好求助于损伤力学了。

损伤力学的研究，已涉及混凝土和岩石的断裂、压力加工中的塑性变形控制、核反应堆结构元件的强度、非线性积累疲劳损伤、纤维和颗粒复合材料的破坏等方面，并且已经取得一些初步成果。工程界对于损伤现象是十分关注的。然而，损伤力学的研究方法并不统一，比如有人使用连续介质力学的唯象学方法，有人采用统计力学手段，有人使用数学力学上更为严密的细观（mesoscopic）方法，损伤变量的定义和测试方法尚有争议。总之，目前还没有国际上公认的损伤力学体系。

100 多年来，人们对脆性断裂过程的研究逐渐深人，特

别是近几十年，对疲劳、断裂和损伤的认识更加细化。研究的尺度范围，涉及10^{-10}m(Å)到10^{-8}m的亚微观区域、10^{-8}～10^{-4}m的细观区域、10^{-4}～10^{-2}m的宏观裂纹尖端区域、10^{-2}～10^{-1}m的试样尺寸区域，以及10～10^{2}m的结构尺寸区域。学科上跨越到金属物理学、工程材料学、应用力学、结构力学和结构设计，创建了疲劳理论、断裂力学和损伤力学这些应用力学的新分支。现在已经揭示出，控制材料强度的核心是其细观和亚微观结构，并出现了"微观力学"(micro-mechanics)① 和"微结构力学" (mechanics of micro-structures) 的提法。这将加深人们对材料破坏的认识，更加合理地使用材料和进行设计，形成系统的结构完整性科学。

参考文献

[15.1] W.D.Biggs, *The Brittle Fracture of Steel*, McDonald, 1960。

[15.2] S.P.Timoshenko,《材料力学史》，上海科学技术出版社，1961。

[15.3] J.F.Bell, *The Experimental Foundations of Solid Mechanics*, Springer, 1973。

[15.4] W.S.Pellini,《结构完整性原理》，国防工业出版社，1976。

[15.5] Engineering Sciences Data, No.70010, 70016,ESDU, 1973。

[15.6] 周明鹦，"三十年来金属结构脆断研究的进展"，《长沙工学院工学学报(断裂力学专集)》，1(1977)。

① 有的译为"细观力学"，或写成mesomechanics。

[15.7] 郝松林、陈铸曾，“损伤及损伤力学”，《国防科技大学学报》，2(1984)。
[15.8] Г.П.Черепанов，《脆性断裂力学》，科学出版社，1990。
[15.9] J.Lemaitre, *A Course of Damage Mechanics*, Springer-Verlag, 1992。

十六、漫步压杆之林

压杆在工程上处处可见，如曲柄连杆、千斤顶丝杠、压缩机活塞杆、各种结构支柱、杆系结构中各受压杆件……等等。人类文明早期的柱（石柱、木柱）就是典型的压杆。材料力学在初创时期，将压杆问题称做柱，压杆与柱为同义语。随着工业和工程材料的发展，如钢铁的大量应用以及高强度合金的出现，使压杆的设计由粗变细。人们对压杆的认识在实践中不断深化，其中也包括从各种错误所引起的灾难性事故中去寻求和探索它的规律。

一、人类早期文明时的压杆——柱

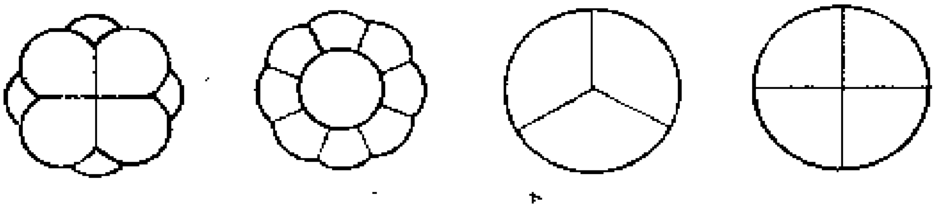
大约六七千年前，我国新石器时代的房屋，具有代表性的营建方式主要有两种：一为长江流域多水地区的干阑式建筑；另一为黄河流域的木骨泥墙房屋。这两种营建方式都离不开柱子。从浙江余姚河姆渡干阑式建筑遗址中，发掘出有截面为圆形和方形的木桩。在河南、陕西一带仰韶文化遗址的土木混合结构中，虽然木柱早已腐朽，不复存在，但是从遗留下来的不少圆形柱洞可以推测柱子也是圆截面的。此后，木柱大多是圆柱，逐渐又出现了各种正多边形截面的柱子，如方形、八角形、瓜棱形等等。

山东济南长清县孝堂山的东汉石祠，是我国现存最早的

一座地面房屋建筑，它的石柱是八角形的。在山西五台，现存最古老的唐代木构建筑南禅寺大殿，有圆柱和抹角方柱；现存最大的唐代木构建筑佛光寺大殿，有径高比为 1:9 的圆柱。

几千年来，柱子大多采用圆形和各种正多边形截面，如果说，原始社会时采用圆柱是为了减免加工的话，那么后来采用这样的柱子，与梁多用矩形截面不同，除了艺术、宗教等因素外，显然也反映了力学上的经验。

尤其值得一提的是“拼合柱”。建于 1008～1016 年间(北宋前期)的浙江宁波保国寺大殿，是一座木架建筑。它的四根内柱是用拼合法制成的，其中三根是由八根木料拼成的八瓣形柱子，一根是由九根木料拼成的八瓣形柱子，截面形状如图 16.1*a* 和 *b* 所示。这是国内已知的最早拼合柱实例。此后，在1103年问世的李诫《营造法式》中，也有“三段合”和“四段合”等拼柱法，截面形状如图 16.1*c* 和 *d* 所示。其拼合方法与保国寺大殿稍有不同。古人说：“屋大柱小，可为寒心。”①



(*a*)　　(*b*)　　(*c*)　　(*d*)

图 16.1

但是，大木柱不可多得。用小木料拼成大木柱，不仅可以解决大木料来源上的困难，而且牢固拼合成的大柱比几根单独的小柱，具有较大的承载能力。

在国外，古希腊人建造神殿时，采用了“仿生学”的方法

① 见《汉书·李寻传》。

来确定柱子的尺寸。他们测量男人的足印，并把量得的这个尺寸折算成人高，发现足长大约是人高的$\frac{1}{6}$。于是他们将这个比例用到柱子上，取柱高（包括柱头）等于柱基尺寸的六倍。后来，他们建造纪念一个女神的神殿，由于女人比男人显得苗条，所以此时把柱粗改为柱高的 1/8 。

总之，此时期对于柱子尺寸和形状，是用直观的、经验的或其他的方式来确定的，其承载能力没有成熟的力学分析方法。

二、从文艺复兴到 20 世纪初叶

文艺复兴以来，人们逐渐开始用理论和实验分析的方法研究柱的承载能力问题。

1. 早期考虑压杆的人

达·芬奇不仅是文艺复兴时期一位卓越的艺术家，以他的画知名于天下，而且他还是一位伟大的科学家和工程师。他对力学特别感兴趣，在他的笔记中写道："力学是数学的乐园，因为我们在这里获得了数学的果实。"达·芬奇对压杆做了一些开拓性的工作。他认识到，由一些杆子紧密构成的组合柱，其承载能力要比这些杆子各自所能承受载荷的总和大许多倍。他提出了用实验来证实这一点的方法。将竖直的铁丝下端固定，上端加载，使它弯曲。然后把两根、四根……同样的铁丝捆在一起，依次重复上述实验，并比较使这些柱子弯曲的载荷。他似乎从实验得出这样的结论：高度一定的柱子

的承载能力与其直径的立方成正比。①同时他又认为，截面一定的柱子的承载能力与其长度成反比。他还尝试确定当柱子的高度和直径都改变时，其承载能力将如何变化。

荷兰乌德勒支大学和莱顿大学物理学教授穆申布罗埃克(P.van Musschenbroek)测定了多种材料的力学性能。在1729年《物理实验与几何》一书中，他介绍了实验的设备和方法，而将实验的结果收入另一著作《物理论文》中。通过对纵木杆的受压实验，他得出"压曲载荷与杆长的平方成反比"的重要结论。这个结果15年后由欧拉从理论上推导出来。当时的工程技术人员甚至一些有名气的学者并不承认这一重要结论，仍坚持认为柱的承载能力只与其横截面面积有关，而与它的长度无关。

2. 欧拉和拉格朗日的贡献

众所周知，压杆临界力公式是数学家欧拉首先导出的。前面第十一篇已经介绍过，他在1744年出版的变分法专著中，推导出了图16.2*a*所示梁的大挠度弹性曲线的微分方程，即第十一篇中的式(*c*)。欧拉还研究了图16.2所示各种弯曲情况，并按外力方向与力作用点处曲线切线的夹角大小进行分类。当夹角很小时，引伸出图16.2*b*所示柱的纵向弯曲这种重要情况。欧拉得到细长压杆失稳后弹性曲线的精确描述，并指出使它压曲的载荷(后来被称为欧拉临界力)可用下式计算：

① 这里暂按文献[16.1]。其他书有不同说法，例如：文献[16.2]英文原版是"与横截面的某些比值成正比"；文献[16.2]的俄译本是"与横截面面积成正比"；文献[16.2]的中译本是"与横截面的某些高宽比成正比"。

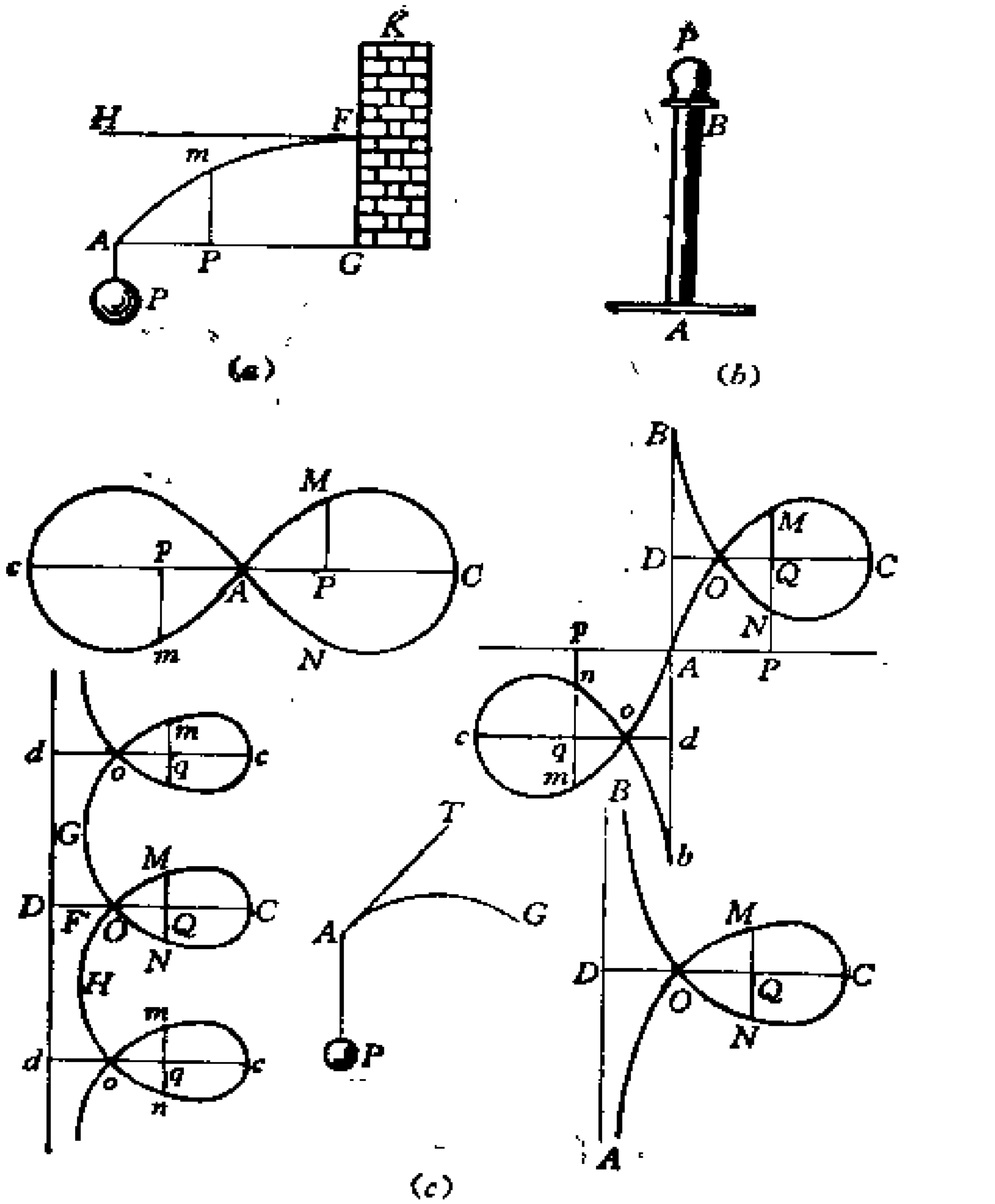


图 16.2[1]

$$P=\frac{C\pi^2}{4l^2} \qquad (a)^{[2]}$$

① 此图据文献[16.2]。文献[16.4]第263节对弹性曲线的类型问题有较详细的讨论。

② 后人对式(a)所描述的压杆约束情况有不同的解释。例如，文献[16.2]认为欧拉讨论的是一端固定、另一端自由的压杆；文献[16.3]则认为他讨论的是两端铰支的压杆，其说不一。

其中l为柱的长度。但他同时错误地认为，矩形截面的C与厚度的平方成正比。欧拉就式（a）还做了这样的说明："如果载荷P不大于$C\pi^2/4l^2$，柱子绝对不会发生弯曲；反之，如果载荷P大于这个数值，柱子就会弯曲。当柱子的弹性和厚度不变时，它能安全承受的载荷P与柱长的平方成反比，当柱长增加一倍时，它只能承受原载荷的1/4。"

欧拉出生在瑞士，是一位天才的数学家。他大器早成，13岁入大学，16岁得到硕士学位，23岁成为俄国圣彼得堡科学院的成员，26岁就任该院数学部主任。1741年赴德国任柏林科学院院士，25年之后又再到俄国。欧拉一生有大量的著述问世，是一位勤于耕耘的学者。① 最令人敬佩的是，他在困难的条件下对科学的执着追求和奉献精神。欧拉28岁时右眼失明、左眼生翳，在微弱的视力下坚持写作。尤其是到生命最后的17年里，处于几近失明乃至完全失明的状态，仍在助手和亲人的协助下陆续写出了400多篇论文。

压杆问题是欧拉多年感兴趣的问题，在1757年又出版了《关于柱的承载能力》的论著。他利用经过简化的近似微分方程：

$$C\frac{d^2y}{dx^2}=-Py$$

简便地导出了临界力的公式。他提供了一个比1744年较为令人满意的关于C的讨论，并断定它必须是力的因次乘以长度的平方，从而纠正了自己以前的错误。此后，欧拉讨论过变截面柱以及沿柱长受轴向分布载荷等压杆问题，但未得出正

① 欧拉写的书和论文共计886件，可能是迄今为止最高产的数学家。在他死后的47年中，俄国科学院一直在登载他的论文。从1911年起出版《欧拉全集》，多达70余卷。

确的解答。

19岁就成了数学教授的拉格朗日是欧拉的忘年交。欧拉很佩服拉格朗日的数学才能，并推荐他为柏林科学院的外籍院士，后又推荐他接替自己在柏林科学院的工作。拉格朗日在1770～1773年的有关柱的形状的论文中，也研究了压杆稳定问题。他在欧拉近似微分方程的基础上，得出了两端铰支的压杆的临界力公式如下：

$$P_{cr}=\frac{m^2\pi^2 C}{l^2} \qquad m=1,\ 2,\ 3\cdots\cdots$$

拉格朗日又用精确的微分方程研究了超过临界力时所产生的弯曲变形。通过展成级数后积分得出了载荷与最大挠度的关系式①。此外，他还讨论过变截面柱的屈曲，对于柱沿轴向的合理外形问题并未得出满意的解法。

超过临界载荷的挠度计算是有意义的。对于一根两端铰支、长为l的细长压杆，压屈后中间挠度f、杆两端移近值Δ与载荷P的关系，我们可求出几组数字如表16.1所示。由此表可见，若载荷超过临界力的2%，长为5米的细长杆就有62.5厘米的最大挠度，同时两端移近了20厘米。所以工程上P值绝不能大于P_{cr}，否则就会出现灾难性的后果。细长压杆试验

表 16.1

P/P_{cr}	f/l	Δ/l
1.002	0.039	0.004
1.020	0.125	0.040
1.200	0.329	0.340

① 现在通常由椭圆积分求得。

形象地表明了这一点。

根据文献[16.4]的介绍，欧拉和拉格朗日曾做出过这样的总结：对于较短的柱，只会发生压缩，对于较长的柱，则会发生弯曲。他们的工作由其后的专家们的理论和实验研究做出了肯定。

3．杨等人对欧拉公式的认识

英国有名的自然哲学教授杨在1807年出版的《自然哲学与机械技术讲义》一书中指出，用欧拉公式确定柱的截面尺寸时，它的适用范围只限于细长杆，而且要对柱的长度与其横截面厚度之比给出某些确定的极限值。因为这个比值不大时，柱子的破坏形式将是材料被压毁而很少是被压曲的。

杨研究了具有初曲率的等截面柱受压后的弯曲问题，也讨论了细长悬臂柱的偏心受压问题。此外，还讨论过变截面柱的屈曲问题。他在关于受压柱体的侧向屈曲问题的见解中，指出了实际情况与理想状态的差异："在承受轴向力的柱子的所有弯曲实验中，可以看到显著的不规则性。无疑，其中有些实验是因为不容易做到作用力恰巧位于轴线上，另有些实验则因为用了不均匀的材料，其纤维方向原先就已弯曲而不是沿直柱的方向所致。"因此，他的研究具有实用意义。

法国工程师和力学教授纳维在有关材料力学的讲义1826年第一版中，推出了欧拉公式。他提出了一些具体规定。例如，当杆长超过厚度20倍时，欧拉公式适用；短杆应按压缩计算；对于木柱和铸铁杆，针对一些具体尺寸建议降低许用应力后按压缩计算。但他对中长压杆实验与欧拉公式不符的原因未作出分析。另外，他研究了偏心拉压问题。

1846年拉马尔（E.Lamarle）在"关于木材弯曲的研究报告"中，具体讨论了欧拉公式的适用范围问题，提出了超过

此范围的压杆要依靠实验解决的见解。关于纵向弯曲理论与实验不尽相符的原因，他是首先给出满意解释的人。对于两端铰支压杆，他导出了如下的临界应力公式：

$$\sigma_{cr}=\pi^2E\frac{i^2}{l^2}$$

式中l/i为长细比。他还断定，只有σ_{cr}值不超过材料的弹性极限时，它才能给出合理的结果。对于铁，他取弹性极限相当于屈服应力σ_S。于是长细比的界限值可由下式决定：

$$\frac{l^2}{i^2}=\frac{\pi^2E}{\sigma_s}$$

当长细比大于此值时，拉马尔建议采用欧拉公式；若长细比小于此值，则用常数值σ_s作为σ_{cr}。可惜拉马尔的建议当时没有引起工程师们的注意。

4. 实验研究与经验公式

18 世纪末以来，人们做过不少有关压杆的实验。例如，在巴黎准备建筑一座教堂，对于如何选择柱子的合理截面曾出现过意见分歧。为了解决这个问题，桥梁专家戈泰特地制造了一台试验机，对立方体和长条形石料进行实验。他1807年死后，由纳维整理在 1809～1813 年间出版的《桥梁建筑论著》中，提到长条形试样的压缩强度较立方体试样为小。吉拉德在 1798 年《固体抗力分析》一书中，介绍了一种特制的压杆实验装置。测定弯曲刚度时仍然引用欧拉未改正前的假设（即$C\propto bh^2$），压杆实验结果与欧拉的理论不完全吻合。

杜洛在 1820年的“锻铁的抗力理论与实验”一文中，谈到用很细长的铁杆做实验的情况。他仔细地沿着轴线方向施加载荷，得到的结果与欧拉的理论非常符合。他指出，如果端部条件满足理论上的假定，欧拉公式能给出屈曲载荷的合理

数值。

随着铁结构的广泛应用，19 世纪初叶柱的屈曲问题的重要性就日益显露出来了。又由于结构中所用的杆件并不象杜洛实验的铁杆那样细长，用欧拉公式会给出过大的临界力数值。所以人们着手实验研究，并通过实验建立一些经验公式。

在 1822 年英国工程师特里德戈尔德（T.Tredgold）所著《实用铸铁强度论》一书中，载有著者的全部实验结果和设计铸铁结构用的许多规范，他断定两端铰支的矩形截面压杆在破坏时的压应力可用下式计算：

$$\sigma_{max}=\frac{P}{bh}\left(1+a\frac{l^2}{h^2}\right) \qquad (b)$$

式中a为常数。式（b）是由下式演化而来的

$$\sigma_{max}=\frac{P}{A}+\frac{M}{W}=\frac{P}{A}\left(1+\frac{6\delta}{h}\right)$$

其中将$\delta\propto l^2/h$代入即可，式中δ为挠度。①

1832年，瑟里（H.de Thury）发表了铁柱的实验结果，认为空心圆柱的强度比实心的好。

1840年，霍奇金森向英国皇家学会提出有关柱的屈曲方面的研究报告。他实验的试样有空心圆杆和实心圆杆，两端是圆头的或平头的。实验表明，长为l、直径为d的细长受压杆的极限载荷与d^4/l^2成正比，与欧拉公式非常符合；两端平头或圆头而长度为前者的一半的短压杆强度相同；短压杆与理论公式相差很大。将$l/d=121\sim15$的圆头实心圆柱的结果加以估算，他取极限载荷与$d^{3.6}/l^{1.7}$成正比。

19 世纪中叶，根据霍奇金森所导出的一些公式被广泛使用。然而，他在实验中大多数杆件端头是平的，端部条件没

---

① 由$\delta\propto Ml^2$和$M\propto\sigma_{max}I/h$，可得$\delta\propto l^2/h$。

有明确规定，有时也用圆头的，但接触面却不是球形，以致任何微小的屈曲就会引起偏心。鉴于霍奇金森公式存在缺点和使用不便，后来，乐甫(G.H.Love，1859年)和戈登(L.Gordon)等提出了一些简化的经验公式。戈登将上述特里德戈尔德的公式(b)加以修改，利用霍奇金森的实验结果，确定出式(b)的常数 a。对于锻铁，戈登得出极限应力如下：

$$\sigma_{cr}=\frac{248}{1+\frac{1}{12000}\left(\frac{l}{h}\right)^2}\quad (\mathrm{MPa})$$

对于两端固定的压杆，他建议用1/2000来替代上式中的1/12000。

1860年，兰金建议了一个类似于戈登的公式。对于非矩形截面杆他用长细比l/i代替l/h，同时相应地改变了戈登公式分母中数值因子的大小。该公式曾广泛流传于欧美，比如，此期间在美国的设计规范中对锻铁压杆的临界应力的经验公式是

$$\sigma_{cr}=\frac{275}{1+\frac{1}{40000}\left(\frac{l}{i}\right)^2}\quad (\mathrm{MPa})\qquad (c)$$

后人将这种经验公式称为戈登-兰金公式。

现在材料力学书中介绍的中长杆的直线公式起于何时，是由何人提出来的，众说纷云。如认为：1882年，伯尔(W.H.Burr)；1886年(或大约1890年)，约翰孙(T.H.Johnson)；1892年，雅辛斯基(ф.С.Ясинский)；1896年，泰特马耶尔(L.von Tetmajer)。抛物线公式又是何人何时提出的呢？一般认为是约翰孙(J.B.Johnson)在1892(或1893)年提出的；也有人说是奥斯坦费尔德(A.Ostenfeld)在1898年提出的。

雅辛斯基是俄国彼得堡交通工程学院结构力学和弹性力

学教授。他广泛搜集各种实验资料，制出一个实用表格。表中给出了长细比$\lambda>20$的情况下各种长细比所对应的临界压应力。他还指出，借助"折减"长度可以将两端铰支压杆的临界应力表格用于其他支座形式。关于雅辛斯基对压杆方面的贡献后面还要提及。这位才华横溢的学者由于英年早逝，中断了他盛时的研究，实在可惜。

从19世纪末叶到20世纪初的许多实验都肯定了欧拉公式的正确性，这里只择其具有代表性的介绍一二。

慕尼黑工业学院力学教授包辛格于1871年创立了欧洲大陆最高水平的材料试验室。他在1887年发表了比前人更为可靠的柱的实验结果。由于在试样两端装上圆锥形的端头，保证了端部的自由转动和载荷沿中心线作用。实验表明，细长杆的结果与欧拉公式一致。较短的试样在超过弹性极限的压应力下发生屈曲，欧拉公式不再适用。

苏黎世工业学院教授泰特马耶尔于1879年创立了材料试验室，这个学院试验室不久就成为欧洲颇有名声的了。泰特马耶尔主持了各种截面形状压杆的实验，于1903年发表了实验所得的曲线(见图16.3)。对于建筑钢，他推荐长细比大于110时才能使用欧拉公式计算σ_{cr}，并给出了临界应力的直线经验公式。对于戈登-兰金经验公式，他曾指出，要使方程与实验相符，分母中常数因子不能为常数，而必须随l/i增大而减小。这在当时并未引起人们的重视。他通过实验还验证了偏心压杆的理论公式。

压杆稳定的更精确的实验是1910年由卡门(T. von Kármán)在柏林完成的。他用矩形截面的钢杆(比例极限为240MPa，屈服极限为316MPa)做实验，并利用刀口施加载荷以保证压杆两端的自由转动，其结果与欧拉公式非常接

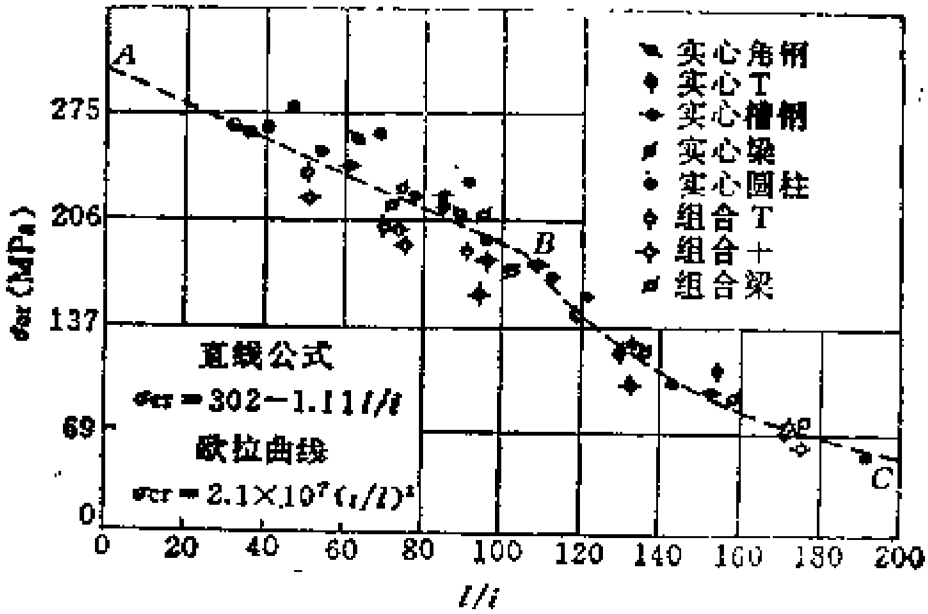


图 16.3

近，相差不超过1.5%。

5. 非弹性范围屈曲

恩盖塞(F. Engesser)是一位对稳定理论做出许多贡献的工程师。青年时期参加过一些铁路桥梁的设计和建造工作。他在1889年和康西德尔(A. Considére)在1891年分别提出，欧拉公式亦可用于非弹性范围。具体做法是用变化的切线模量$E_t=\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$替代不变的弹性模量。

1895年雅辛斯基指出，直杆受压弯曲时，凸边卸载仍用弹性模量E。恩盖塞接受这个意见，建立了双模量公式。1910年卡门做了更加完善的分析，独立地得到双模量公式，它与杆的截面形状有关。比如，卡门给出矩形截面杆的结果如下：

$$E_r=\frac{4EE_t}{(\sqrt{E}+\sqrt{E_t})^2}$$

E_r称为折算模量。人们往往又称E_r为恩盖塞-卡门模量或卡

门模量。

双模量公式提出后，长时间以来人们对这样处理超过弹性极限的压杆稳定问题（亦称塑性屈曲）认为总是对的，没有异议。后来，铝合金广泛应用于飞机结构。对这种材料制成的压杆进行了一系列的实验研究，发现其临界载荷值与切线模量公式较为接近。用一些钢、铜和不锈钢等材料的中长杆做实验，也有这种倾向。对于这个曾经困扰人们的“压杆之谜”，1947年湘利（F.R.Shanley）作出了比较明确直观的解释。[16.12]其后一些学者的研究亦进一步肯定湘利的分析。

三、压杆与工程结构破坏事件

1．两例事故

19世纪的最后25年，欧美发生过一系列铁路和公路桥梁以及杆系结构的破坏事件，有不少是由于压杆失稳造成的。其中，首推美国横跨阿什特比拉河上同名桥的破坏。

1876年12月29日晚8时许，一列由两辆机车和11节车厢组成的快车在这座桥上通过。漫天大雪使列车只能以16～19公里/小时的特慢速度行驶。当第一辆机车行驶至离对岸不到15米时，司机感到列车在向后拽。于是他给足了汽，猛地开上桥墩，走了45米停下来。回头一看，什么都不见了。由于大桥断裂，后面的列车从21米高坠入河中，列车因锅炉失火而烧毁。158名乘客中有92人遇难。

该桥系双轨路面、跨长37米的全金属桁架式单跨铁路桥，建于1865年。经调查，破坏原因是多方面的。比如，建好后草草验收，施工时出现多处差错，结构设计也不合理，……等等。但直接原因是压杆失稳造成的。由现在分析可知，其斜撑杆最大工作压应力为$\sigma=41.2$MPa。此杆长细比

$$\lambda=\frac{l}{i_{min}}=\frac{671}{2.09}=321$$

按当时美国的设计规范规定，临界应力用前面讲的经验公式(c)计算，可得

$$\sigma_{cr}=\frac{275}{1+\frac{1}{40000}\left(\frac{l}{i}\right)^2}=76.9\text{MPa}$$

这相当于安全系数

$$n=\frac{\sigma_{cr}}{\sigma}=\frac{76.9}{41.2}=1.87$$

结论自然是结构安全。

按1893年雅辛斯基的经验表格，可查出 $\sigma_{cr}=30.9\text{MPa}$。显然，结构并不安全。实际上压杆属细长杆，要按欧拉公式计算临界应力：

$$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}=\frac{\pi^2\times 200\times 10^9}{321^2}=19.2\text{MPa}$$

可见斜压杆失稳是必然的事情。然而，这座桥居然工作了11年，不能不令人惊奇！

另一则事故是瑞士明汉斯太因村铁路桥的破坏。1891年5月14日，一座架设在莱茵河支流比尔斯河上的单轨铁桥坠毁。在有12节车厢的旅客列车上，74人蒙难，200人受伤。

该桥位于瑞士通往巴黎的主干线上，离巴塞尔城东4.4公里，距明汉斯太因车站400米。它是由法国著名设计师和建筑师埃菲尔(A.-G. Eiffel)设计并建造的。这是一座长42米、高6米、宽4.6米的单跨桥，采用埃菲尔式桁架，其结构的立面图和平面图见图16.4。投入使用期间因各种灾害多次维修过。事故发生前不久，考虑机车和列车重量增加，提出重新分析该桥的强度。通过实验表明桥梁桁架可承受一般

载荷，经核算构件的应力不超过66.3MPa，且载荷也未超出原设计规定的技术条件。为保险起见，还是对该桥做了局部加强。

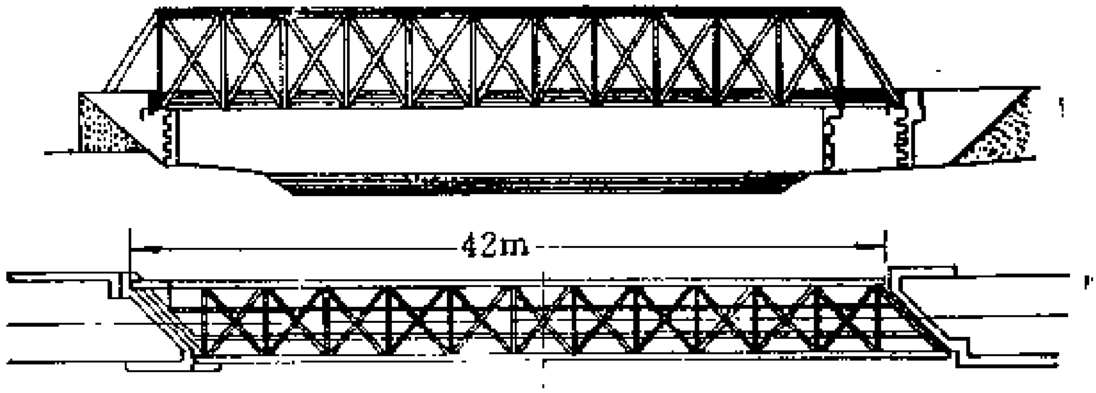


图 16.4

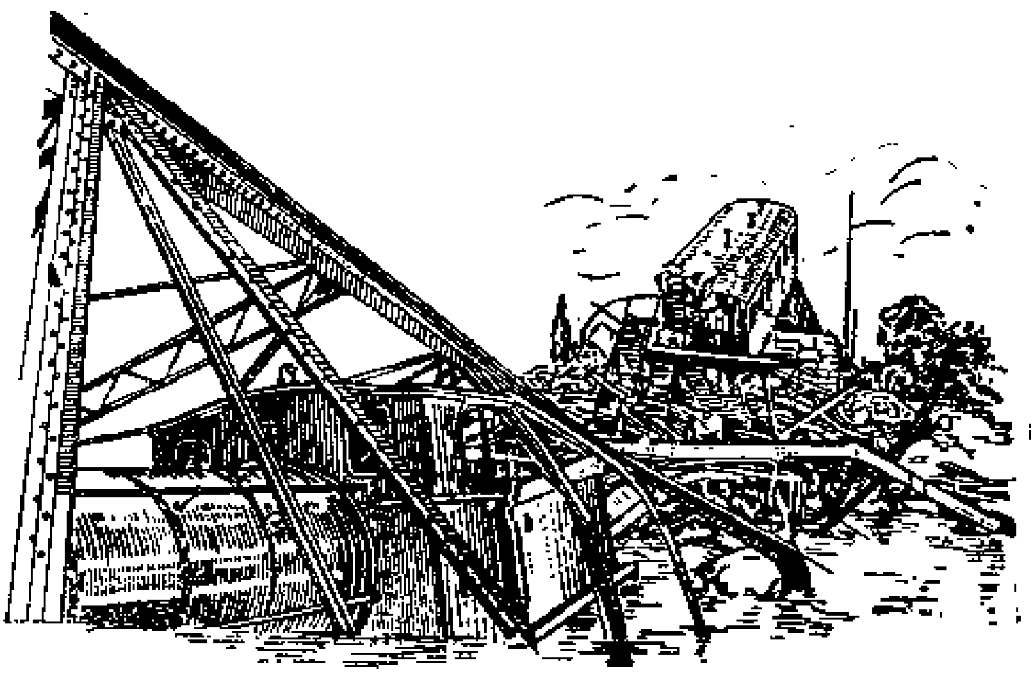


图 16.5①

① 图16.5～16.7，16.10～16.13均取自文献[16.9]。

桥的破损发生在白天。由巴塞尔开过来的列车，由于爬坡车速只有25公里/小时。目击者都说，仅当第一个车头开到桥中央或稍过一点点时，车头连车厢就冲向河里了。图16.5是从对岸看到的破坏情景，图16.6是破坏的全景。

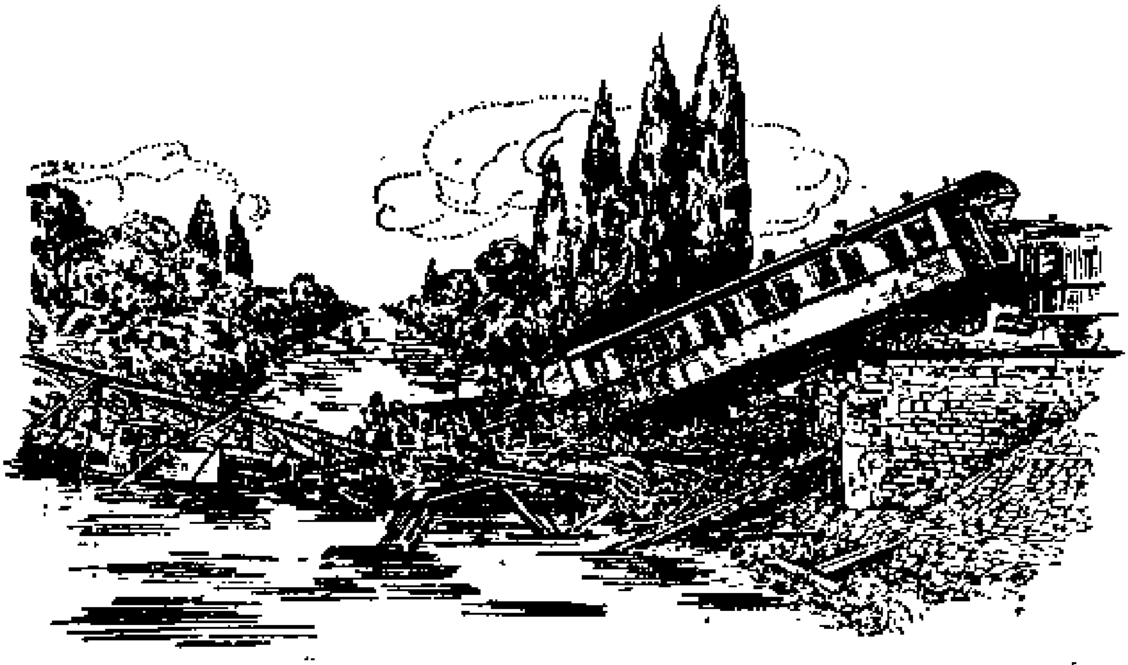


图 16.6

瑞士政府责成结构力学教授里特尔(W. Ritter)和实验专家泰特马耶尔两人分析事故原因。与此同时，恩盖塞教授对该桥也进行了独自的分析。当载荷位于桥跨中央时桁架中间斜杆的压应力为最大，他们一致的意见是，此杆的安全系数低于1(工作压应力为66.3MPa，由欧拉公式算出临界应力为52MPa)。

这一事例说明，在结构设计中缺乏全面的稳定性分析，其后果多么严重；同时，这类灾变的发生也促进人们深入研究它，制服它。

2. 压杆在弹性介质中的屈曲

19世纪末，在欧洲的一些上弦敞开的半穿越式铁桥遭到

破坏。图16.7所示俄国开伏达河上同名桥在1875年的毁坏就是一例。该桥在安装完毕之后，仅当工作车通过时就因受压上弦杆发生了偏离桁架平面的屈曲而被毁。这类桥的破坏，引起了人们的注意。

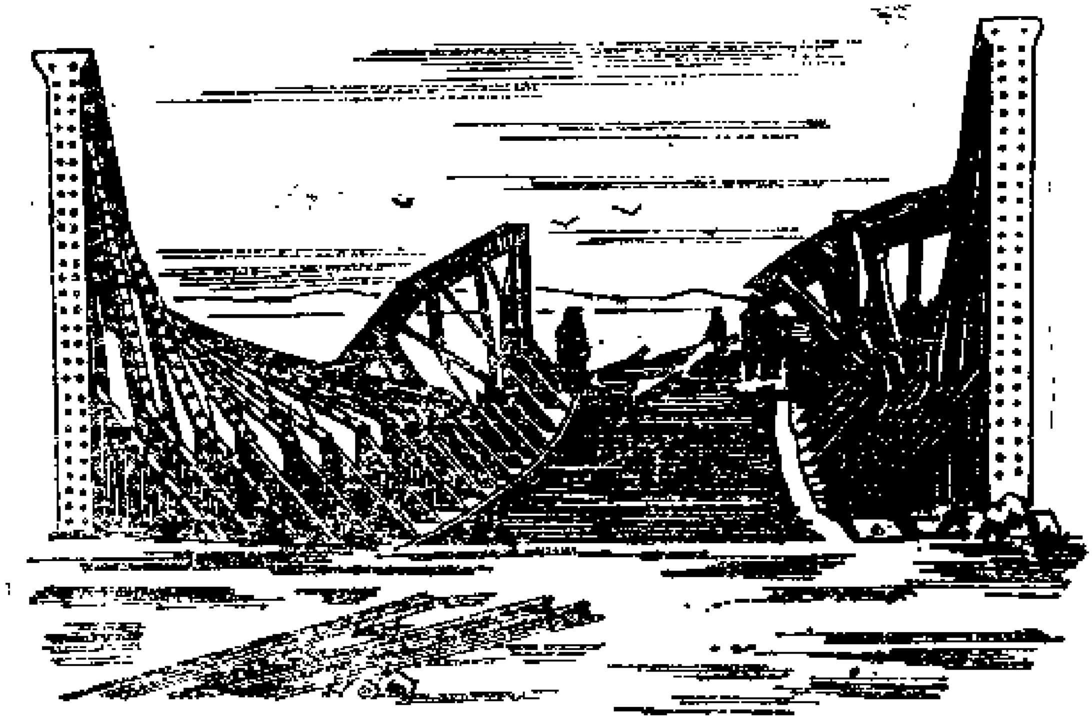


图 16.7

上弦压杆偏离桁架平面屈曲的力学模型可抽象为在弹性基础上的纵向压杆的屈曲问题。这是因为桁架竖杆起着弹性支点的作用。对于带有等距离弹性支点的等截面上弦压杆，1884～1889年间恩盖塞给出了计算弹性支点刚度的一个简单而合理的公式。在分析中他将分散的弹性支点换算成为均匀分布的。

雅辛斯基在1902年对此问题进行理论研究，提供了上弦压杆屈曲的一般解。他认为承压的上弦杆为两端铰支杆，而桁架平面里的斜杆和竖杆则限制它侧向屈曲。他用等效的弹性介质的连续分布的反力代替竖杆的弹性抗力，用连续分布

的轴向力代替斜杆的作用。他算出了压力的临界值。铁木辛柯于1910年运用能量法得出该问题的一般解，并讨论了雅辛斯基解的某些修正。在1918年，恩盖塞对弹性支撑杆的稳定性问题做了实验研究。

运用上述理论算得开伏达桥上弦杆的临界应力为83.4MPa，而当工作车在桥上行驶时，上弦杆的最大工作压应力已达95.1MPa，当然铁桥承受不了这一载荷。

3. 组合柱的屈曲

随着工程结构规模的不断扩大，在较大的外力下，柱由实体截面向组合截面发展。组合柱的结构形式主要有两类，其结构示意图例见图16.8。其中图16.8*a*是格子式，图16.8*b*是框架式。

恩盖塞是第一个研究组合柱稳定理论的人。1891年他研究了压杆中剪力对临界力的影响。恩盖塞发现剪力对实体截面杆的影响很小，可以忽略不计，而对组合柱会起决定性的作用。继而推出了格子式组合柱的临界力计算公式。在1907和1908年，结合魁北克大桥第一次倒塌事件，他对组合柱的稳定性问题又做了进一步的探讨。魁北克事件震惊了工程界，并吸引了许多有名望的学者对它进行深入的分析。普朗特(L. Prandtl)于1907年、铁木辛柯于1908年对此都有著述。使人们认识到剪力对组合柱的显著影响，对框架式组合柱的影响尤甚。他们以及其后的大量研究为组合柱的设计提供了新的可靠的方法，至今还反映在桥梁设计实践中。威利(L. T. Wyly)在1940年总结以往压杆破坏情况时指出，格子式组合杆破坏的记录中，有3/4是由于局部较弱造成的，而并非总体失稳。

1907年8月29日，在加拿大离魁北克城14.4公里横跨圣

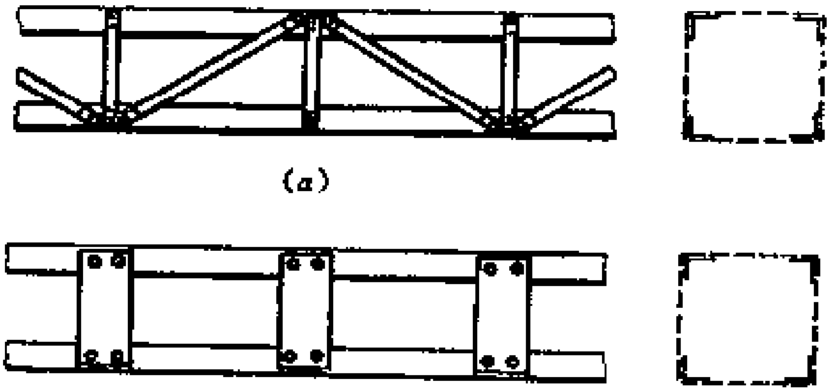


图 16.8

劳伦斯河的大铁桥在施工中倒塌。灾变发生在当日收工前15分钟，桥上的74人坠河遇难，目击者只有三人（桥下一人及时逃开了，水中救起一人，河对岸一人）。到这一天工程已建造部分，从桥的东侧看去，其立面图如图16.9所示。

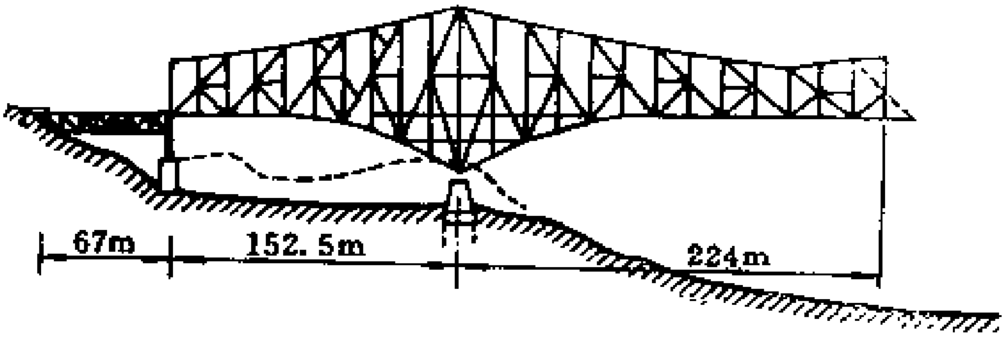


图 16.9

该桥全长988米，共五跨。中跨549米，两侧跨各152.5米，接岸两跨各67米。宽20.4米，设铁路、公路和人行道各两条。建筑施工始于1905年7月22日，先建造南半桥。施工时大桥上中跨的桁架采用悬挂式拼装法（就是在已建好的侧跨的基础上，中跨桁架作为它的悬臂，向跨中央推进拼装。修好半桥后，再从对岸用同样的方法修建桥的另一半）。

事故发生有一个过程。以倒塌之日来算，23天前发现悬臂桁架西侧下弦杆有两节变弯，被解释为加工中的问题。9天前又发现东侧下弦杆有三节变弯，还是没有引起警觉。两天前的早晨发展到侧跨西侧也有一节弯了，之后还发现多处。技术督监虽然向上级主管作了报告，却很平静，因为认为最大工作应力小于许用应力（前者不会超过后者的87％），应是安全的。事故当天早晨，设计顾问电话通知说，桥上不能再增加载荷了，要立即修复已弯曲了的杆子。虽然他体察到事态有些严重，但实际上还不清楚下弦杆业已失稳，要想逆转事态的发展已经不可能了。

这座桥倒塌的直接原因就是下弦杆的失稳。该杆为组合柱，长1738.5厘米，$i=48.25$厘米，按两端铰支计算，其长细比 $\lambda=l/i=36$。设计中没有考虑纵向屈曲问题。设计时取



图 16.10

许用应力为128MPa，倒塌前下弦杆压应力达到112MPa，为许用应力的87.5％。可是按组合柱考虑，使用恩盖塞推出

的临界力公式算得临界应力为99.1MPa。这无疑要引起下弦杆失稳，以致大桥倒塌。

魁北克桥破坏之前15天，从大桥西侧看，其施工进程的全貌见图16.10。倒塌后全部成了一堆废铁，见图16.11。

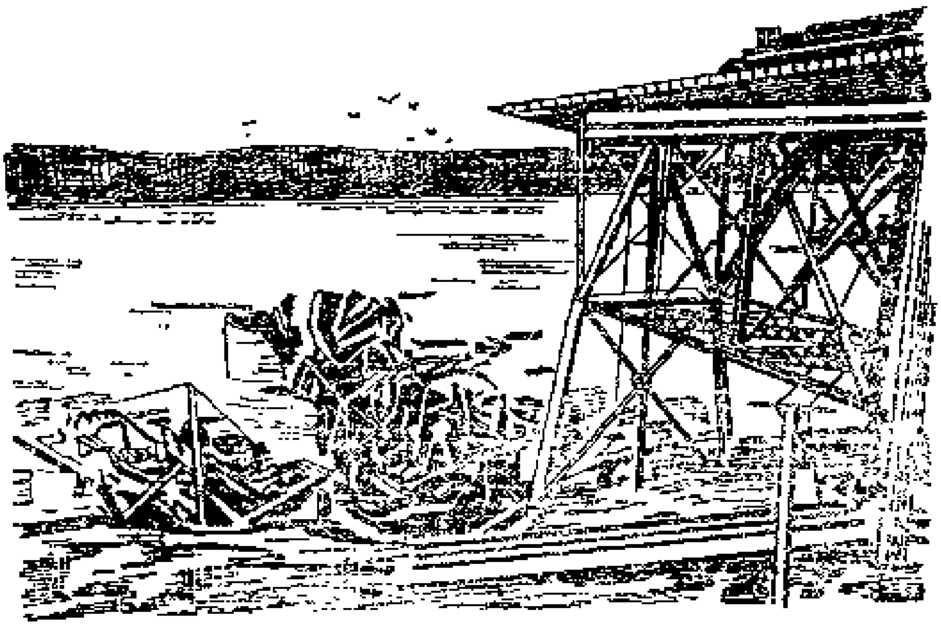


图 16.11

4. 格子式组合柱破坏的又一例

1925年2月13日，在苏联流经俄罗斯和乌克兰的普里皮亚季河上，修复后的莫济里桥正当试车时就出了问题。该桥两侧桁架上两根斜杆（靠近支座的第二根）几乎同时被压弯。幸好桁架落到为试车准备的临时支座上，人们才可看到斜杆屈曲后的情景，如图16.12和16.13所示。前者是从桥下侧面观察，后者是在桥上看。组合柱是在桁架平面内的屈曲，长1537.2厘米的斜杆，一根鼓出了146厘米，另一根鼓出了90.5厘米。

斜杆为格子式组合柱，其细部尺寸以毫米计，如图16.14所示。后经分析，从理论上看是不该失稳的。那么，失稳是

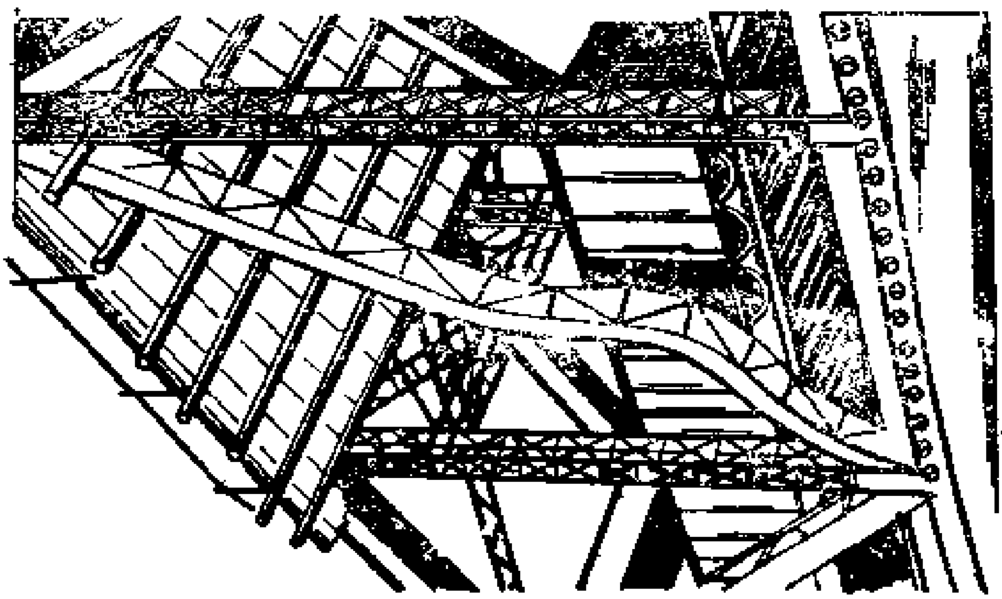


图 16.12

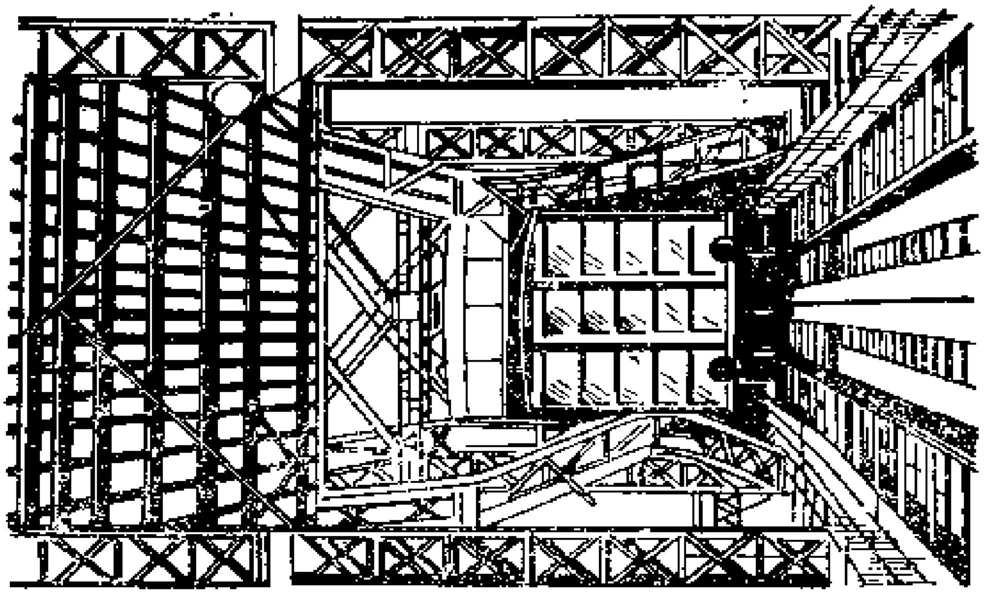


图 16.13

怎么引起的呢？这根斜杆看起来很强大，若组成格子的诸多

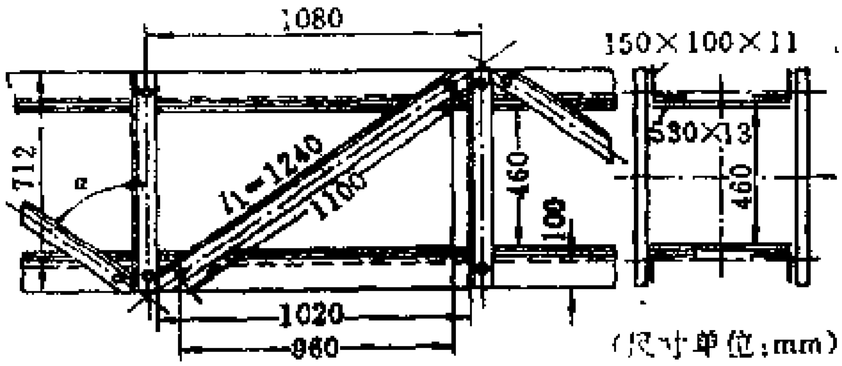


图 16.14

缀条（连接柱子成为整体的短小杆件）相对弱小，或者联接的铆钉过小或钉小孔大，实际上柱子就不能形成强大的整体。几经灾难的莫济里桥（从1915年建成以来，经过战火、爆炸、拆卸、改建等多种变化）的破坏，后人认为是由于格子节点弱，未能将柱子连接成强有力的整体，以致试车时尚未达到设计载荷就失稳了。

5. 框架式组合柱破坏一例

对于框架式组合柱(图16.8b),理论分析指出剪力的影响比较大。对此，铁木辛柯在1913年做过实验探讨。工程上使用这类柱，若设计不当就要出大事故。最突出的一例是德国汉堡煤气库烧毁事件。这一事件发生于1909年，在工程界引起极大反响，促使人们对框架式组合柱的稳定性问题做出深入的分析研究。

框架式组合柱是由缀板（即连接用板）将柱子连为整体的。它的抗剪能力弱。现行的设计规范中不允许在桥梁和建筑结构中采用这类结构。然而，一些小的电视和无线电发射塔架可以采用，这是指它只能用于非重要的承力结构中。这些规定也反映了从工程事故中所汲取的教训。

1907年汉堡当局决定建造容积达50万立方米的煤气贮

库。其一容积为20万立方米的贮库已建成。新库设计成架空式，煤气贮箱架在一个支持架上，其下可通过运煤车辆，支架的立柱是框架式组合柱。

1909年建成后，从11月26日开始昼夜大量贮气。气体压力比设计值大，所以在灌气过程中对贮箱的变化进行了跟踪观察。到12月6日为止仍然工作正常。然而翌日在刚一开始充气时，贮箱突然坏了，顷刻被火焰笼罩。全部灾变发生在几秒钟之内，有70人受害，其中13人当场死亡，后又有7人因重伤而死去。

这一灾难是由支架结构的支承柱失稳而引发的。静力分析可知中间柱子压力为515kN。柱长340cm，截面由两槽钢组成(见图16.15)。每一槽钢的惯性矩 $I_{y_0}=85.3\text{cm}^4$，截面面积 $A=24\text{cm}^2$。人们对设计上的问题作过一些分析，试介绍如下，以供参考。

若设想柱子两端为铰支，并考虑剪力对组合柱临界力的影响，采用铁木辛柯的有关公式，可以算出此组合柱的临界力等于858kN，即临界应力为179MPa，小于比例极限。

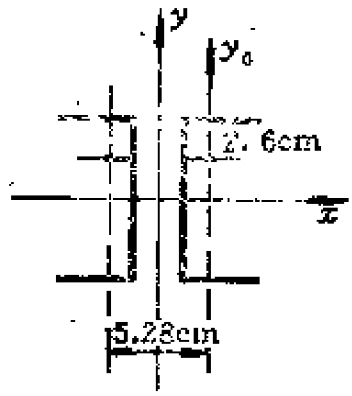


图 16.15

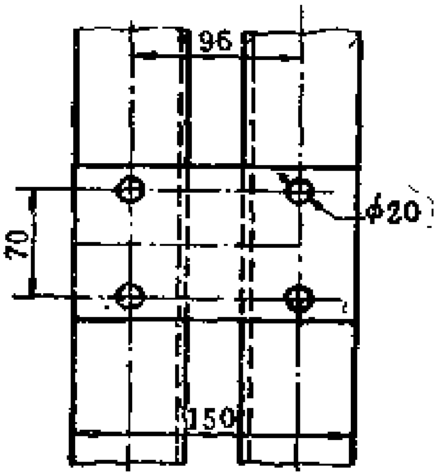
若设想支承处于两端铰支与一端固定、一端铰支之间，按通常步骤算出相应的长细比λ在92.9至65的范围，选用中长杆的直线公式

$$\sigma_{cr}=304-1.12\lambda \qquad (\text{MPa})$$

可求得临界力在960kN与1110kN之间。考虑到剪力对组合柱的影响，对此值还要打一个折扣。

后来经过鉴定，柱子实际承受的压力为603kN。因此，不论按上述哪一种分析方法，所得的安全系数都只比1略大一点。对于压杆来说，这样的安全系数实在太小了。

事故后做了三根类同的柱子进行实验，测得临界力分别为795、877、819kN。即当工作压力小于临界力的理论值和实验值时便发生破坏。虽然安全系数小了，但似乎其中还有什么因素尚未计人。进一步分析认为，缀板与柱的联接铆钉(见图16.16)太弱，致使铆钉所受的剪应力竟高达247MPa。这是设计时考虑不周的问题。由于铆钉被剪坏，两槽钢构成的组合柱实际上变成了两根独立的柱子。显然两槽钢的临界力之和比组合柱要低，从而导致失稳破坏。



(尺寸单位:mm)

图 16.16

失稳破坏事故不胜枚举，我们暂且谈到这里吧!

*　　　*　　　*

自1744年欧拉第一个研究压杆稳定问题以来，关于压杆稳定性的概念、分析方法、测试手段和研究范围都有很大发展。特别是电子计算机的应用，更是大大地提高了人们的解析能力。

同其他科学问题一样，压杆稳定性研究的发展与生产力发展的水平密切相关。欧拉公式面世后在相当长的时间里，之所以未被认识和重视，就是因为当时实用的木柱和石柱都不是细长的。到1788年熟铁轧制的型材才开始生产，然后出现了结构钢。有了金属结构，细长杆才逐渐成为重要的议题。特别是19世纪随着铁路建设和发展而来的铁路金属桥梁的大量建造，促进了人们对压杆稳定性问题的研究。

本世纪金属材料发展很快，各种合金钢和铝合金广泛用于各个工程部门。压杆稳定性与材料有关的研究取得了许多新成果，比如，残余应力对钢压杆的影响问题，可视为40年代以来新的研究成就。残余应力是钢材热轧后不均匀冷却造成的。组合杆改为焊接结构后，焊缝区的残余应力可接近屈服应力。工程实践迫使人们认真研究这些问题。又如残余应力、几何缺陷和载荷偏心共同存在时的综合影响问题，也有了新的研究成果，并且都已直接用来指导工程实践。

以上所述仅涉及压杆静力稳定性的部分问题，而工程上存在大量动载荷问题。压杆中动力效应的研究旨在分析多种动力载荷(冲击、振动、交变应力以及动力介质)作用下的动力屈曲。本世纪中期此项研究开始发展，且多为基础性的，如实验、定义和分析方法等。其中关于纵向强迫振动的动力稳定性问题（纵向强迫振动频率达到某临界值时，压杆顺直线外形不再稳定，出现振幅不断增大的横向振动，导致动力屈曲），鲍洛京(В.В.Болотин)有突出的贡献。70年代以来该项研究进一步转向屈曲后非线性行为、分叉和确定性混沌的分析。

含杆、板、壳为一体的结构稳定性是当代普遍关注的问题。当今船舶、潜艇、各种飞行器、车辆、机械、电力设

备、桥梁、建筑乃至生物、医学等都与稳定性有联系。这些不在话题之内，就不说了。

参考文献

[16.1] 亚·沃尔夫，《十六、十七世纪科学、技术和哲学史》，商务印书馆，1985。

[16.2] S.P.Timoshenko, *History of Strength of Materials*, Mc Graw-Hill, 1953; 铁木生可，《材料力学史》，上海科学技术出版社，1961。

[16.3] С.А.Бернштейн, Очерки по истории строительной механики, Госстройиздат, 1957。

[16.4] A.E.H.Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge, 1927; 《力学与实践》，1、2(1985)。

[16.5] 潘谷西，"《营造法式》初探（一）"，《南京工学院学报》，4(1980)。

[16.6] N.J.霍夫，《纵向弯曲与稳定性》，中国工业出版社，1963。

[16.7] A.H.金尼克，《弹性体系的稳定性》，建筑工业出版社，1957。

[16.8] S.P.铁摩辛柯，J.M.盖莱，《弹性稳定理论》，科学出版社，1965。

[16.9] Ф.Д.Дмитриев, Крушения инженерных сооружений, Госстройиздат, 1953。

[16.10] B.G.Johnston，《金属结构稳定设计准则解说》，中国铁道出版社，1981。

[16.11] 赵福滨、老亮，"压杆简史试编"，《力学与实践》，3(1992)。

[16.12] F.R.Shanley, Inelastic Column Theory, *J.Aeronautic Sci.*, 1947, p.261.

[16.13] M.S.El Naschie, *Stress Stability and Chaos*, McGraw-Hill, 1990.

十七、始于中国大学生的创造

在设计压杆的截面时，一般材料力学书上都讲要采用试算法，因为设计前不知应该选用什么公式计算临界应力，也无法查出它的折减系数①。现在，人们已经想出了一些办法，在设计压杆时不一定要用试算法。仅以笔者的孤陋寡闻而论，最初的一个方法是我国大学生首先想出来的。

早在60年代初，中国人民解放军军事工程学院空军工程系学员汤萍，在学习材料力学课程的时候，通过计算尺发现，用折减系数法设计某些截面的压杆时可以不必试算。可惜他当时整理的一份材料不曾发表，后来笔者再也找不到这位学员所写的材料了。

时隔20载，笔者提起此事，文献[17.1]的作者重新研究了这个问题，并写出文章发表在《力学与实践》杂志上。下面通过例子来介绍这种方法。

以设计圆截面压杆为例。已知杆长l，长度系数μ，许用应力$[\sigma]$，承受压力P，求截面的直径d。

由柔度$\lambda=\mu l/i$，折减系数$\varphi=P/A[\sigma]$，以及惯性半径i与截面面积A和形心主惯性矩I的关系$i=\sqrt{I/A}=d/4$，可得

① 又称稳定系数。

$$\frac{\lambda^2}{\varphi}=\frac{4\pi(\mu l)^2[\sigma]}{P} \qquad (a)$$

由于上式的右边各个量都是已知的，所以，只要在一般的λ-φ表中增加一项λ^2/φ(此项可由λ-φ表给出的数据计算而得，A3钢的λ-φ-λ^2/φ表见表17.1)，就可根据式(a)算出的λ^2/φ值从表中查出对应的φ值，然后一次求出所需的直径。下面是一个数字例题。

表 17.1

λ	φ	λ^2/φ ($\times 10^2$)
……	……	……
90	0.669	121
91	0.663	125
92	0.657	129
93	0.650	133
94	0.644	137
95	0.637	142
96	0.631	146
97	0.624	151
98	0.617	156
99	0.611	160
100	0.604	166
……	……	……

例1 由A3钢制成的一根长$l=800$mm的圆截面直杆，两端铰支，承受$P=100$kN的轴向压力，若许用应力$[\sigma]=170$MPa，试用折减系数法确定此杆所需的直径d。

解 将数字代入式(a)可得

$$\frac{\lambda^2}{\varphi}=137\times 10^2$$

由此λ^2/φ值从表17.1中查得对应的$\varphi=0.644$，将各数字代入下式即可一次算出所需直径为

$$d=\sqrt{\frac{4P}{\pi[\sigma]\varphi}}\approx 34\text{mm}$$

上述方法可以用于正方形、矩形、空心圆形、等厚度的空心正方形和等厚度的空心矩形等截面的压杆。例如，对于正方形，有

$$\frac{\lambda^2}{\varphi}=\frac{12(\mu l)^2[\sigma]}{P}$$

采用折减系数法时，上述方法是否可以推广到型钢截面呢？文献[17.2]和[17.3]等回答了这个问题。文献[17.2]引入一个"压杆截面系数"C：

$$C=\frac{A}{i^2}$$

于是导出设计压杆的公式如下：

$$\frac{P}{(\mu l)^2[\sigma]}\leqslant C\frac{\varphi}{\lambda^2} \tag{b}$$

这样，只要预先造出各种型钢的μl-$C\frac{\varphi}{\lambda^2}$表（表17.2和17.3分别列出了工字钢对$x$轴和对$y$轴的部分数值），就可根据给定数据计算出式（$b$）左边的值，并由此值在表中查出所应选择的型号。下面通过例题来说明这种方法。

例2 一工字钢承受中心压力$P=600\text{kN}$，长度$l=2\text{m}$，两个方向的长度系数分别是$\mu_x=0.7$，$\mu_y=1$，许用应力$[\sigma]=170\text{MPa}$，试选择工字钢的型号。

解 1. 防止绕x轴失稳，将数字代入式(b)左边可算出

$$\frac{P}{(\mu_x l)^2[\sigma]}\approx 18\times 10^{-4}$$

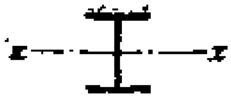


表 17.2

$C_x\frac{\varphi}{\lambda^2}$ (×10⁻⁴) 型号 \ $\mu_x l$ (m)	……	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	……
18		21.01	17.76	15.38	13.32	11.72	
20*a*		24.44	20.61	17.82	15.52	13.64	
20*b*	……	27.02	23.17	19.83	17.33	15.13	……
22*a*		29.16	24.46	21.11	18.40	16.17	
22*b*		31.79	27.18	23.53	20.32	17.90	

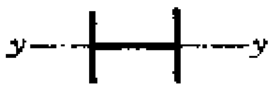


表 17.3

$C_y\frac{\varphi}{\lambda^2}$ (×10⁻⁴) 型号 \ $\mu_y l$ (m)	……	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	……
22*b*		14.23	12.22	10.52	9.11	7.88	
25*a*		15.28	13.19	11.39	9.99	8.64	
25*b*	……	16.85	14.54	12.56	10.94	9.60	……
28*a*		17.80	15.37	13.32	11.57	10.18	
28*b*		19.54	16.87	14.64	12.75	11.15	

在表17.2的$\mu_x l = 1.4\text{m}$一栏中选用20b工字钢$\left(C_x\frac{\varphi}{\lambda^2} = 19.83\right.$ $\left.\times 10^{-4} > 18\times 10^{-4}\right)$。

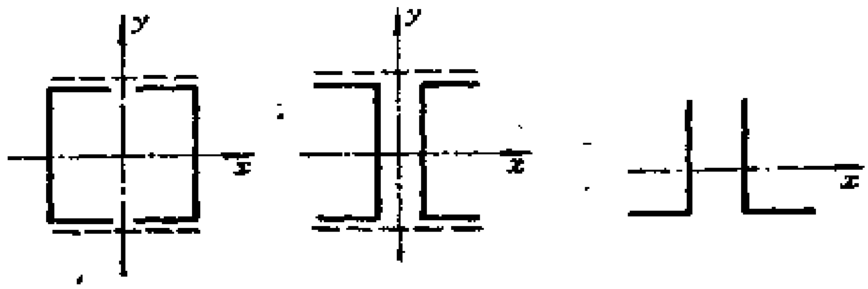
2. 防止绕y轴失稳，同理可算出

$$\frac{P}{(\mu_y l)^2[\sigma]} \approx 8.82\times 10^{-4}$$

在表17.3的$\mu_y l = 2\text{m}$一栏中选用25b工字钢$\left(C_y\frac{\varphi}{\lambda^2} = 9.6\right.$ $\left.\times 10^{-4} > 8.82\times 10^{-4}\right)$。

结论：应选用25b工字钢。

这种方法可以用于其他型钢截面，以及某些型钢组合截面(如图17.1，要求$I_x = I_y$的槽钢组合截面；防止绕x轴失稳的角钢组合截面)。



(a) (b) (c)

图 17.1

文献[17.3]根据下列关系式：

$$\frac{P}{[\sigma]} = \varphi A \quad (c)$$

$$\mu l = \lambda\sqrt{\frac{I}{A}} \quad (d)$$

绘制出型钢的$\lambda\sqrt{\frac{I}{A}}$-$\varphi A$曲线族（图17.2是A3 钢制的工字钢部分型号的曲线)。设计时根据给定的数据，先由式(c)和(d)

分别算出 φA 和 $\lambda\sqrt{\frac{I}{A}}$ 的值，然后从图中曲线选定型号。这种方法同样可用于一些型钢组合截面的设计，只要事先绘制出相应的型钢组合截面的 $\lambda\sqrt{\frac{I}{A}}$-$\varphi A$ 曲线即可。

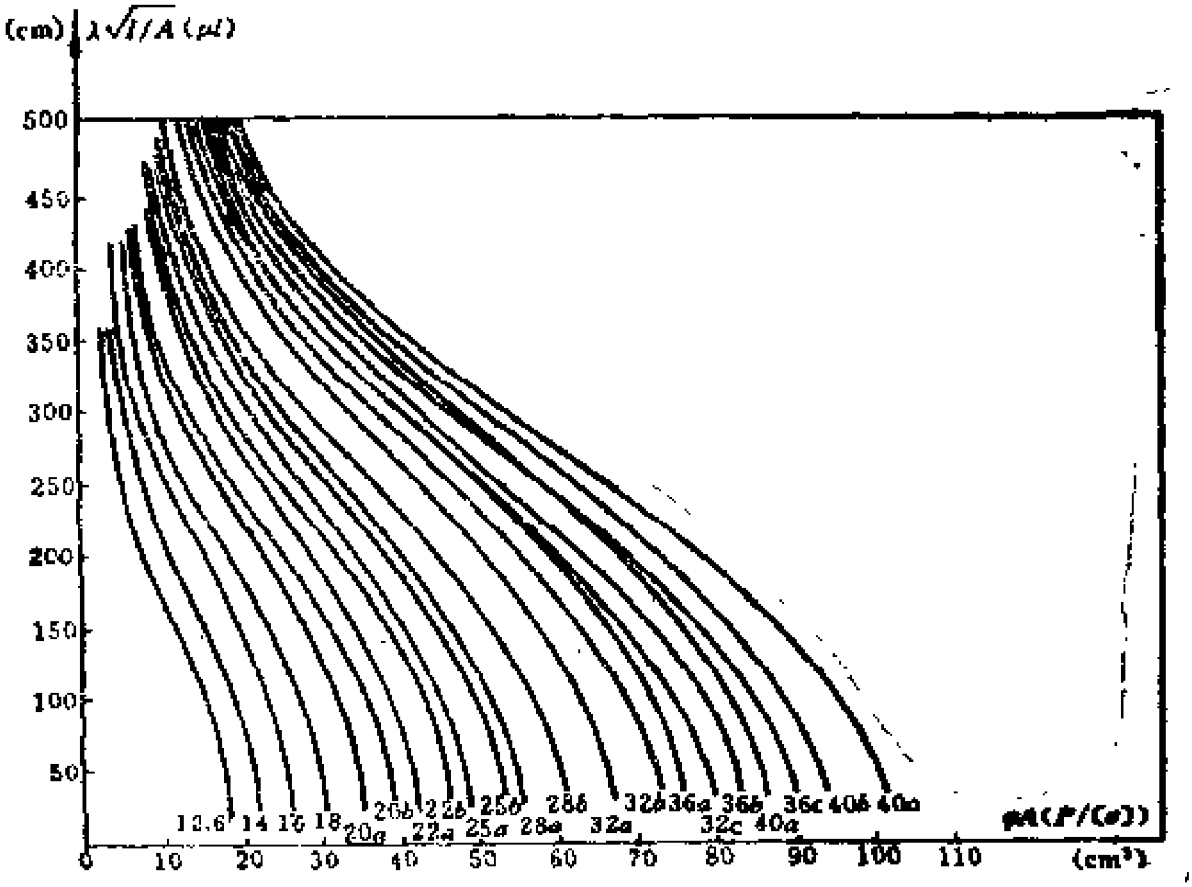


图 17.2

在《力学与实践》1989年第1、6期和1990年第4期上的三篇有关文章介绍了与此不同的一些方法。此外，有些文章介绍的"直接法"，实质上仍然是一种试算的方法。

文献[17.7]提出一种图解解析法。它根据某种关系式，在临界应力总图上画出一族抛物线。设计时根据给定数据算出

某个数值，然后利用图上曲线并作简单的计算，即可一次确定出所需尺寸。其适用范围是I/A^2为常数的圆形、矩形、圆环形等截面设计。但利用这种方法时，设计前还得给出安全系数的大小。如要用随柔度λ而变化的安全系数，则可采用文献[17.8]提供的方法。

文献[17.9]给出了一种先判断压杆类型后设计截面的方法。以木杆为例，木结构设计规范规定：

$$\lambda>80,\quad \varphi=3000/\lambda^2 \tag{e}$$

$$\lambda\leqslant 80,\quad \varphi=1.02-0.55\left(\frac{\lambda+20}{100}\right)^2 \tag{f}$$

设圆杆的半径为r，由式（e）可得

$$\varphi=\frac{3000r^2}{4\mu^2l^2}$$

将上式代入稳定条件$\dfrac{P}{\pi r^2}\leqslant\varphi[\sigma]$，得

$$r\geqslant\sqrt[4]{\frac{P\mu^2l^2}{750\pi[\sigma]}} \tag{g}$$

又由$\lambda=\dfrac{\mu l}{i}=\dfrac{2\mu l}{r}>80$，得

$$r<\frac{\mu l}{40} \tag{h}$$

将式(g)和(h)联系起来，得

$$\sqrt[4]{\frac{P\mu^2l^2}{750\pi[\sigma]}}<\frac{\mu l}{40}$$

上式可改写成

$$\frac{P}{[\sigma]}<9.2\times10^{-4}\mu^2l^2 \tag{i}$$

给出条件满足式(i)者，为大柔度杆，可用式(g)设计。否则

为非大柔度杆，用下面的式(j)设计。

将$\lambda=\frac{2\mu l}{r}$代入式(f)，得

$$2495r^2-11\mu lr-\left(0.55\mu^2l^2+\frac{50^2P}{\pi[\sigma]}\right)\geqslant 0$$

解上式得

$$r\geqslant 2.2\times10^{-3}\mu l+\sqrt{2.2\times10^{-4}\mu^2l^2+0.32\frac{P}{[\sigma]}} \quad (j)$$

文献[17.9]还给出了其他截面和材料的相应公式。

总之，由于$\varphi(\lambda)$的表达方法不同，所以有的"直接法"在形式上不必判断压杆类，如文献[17.1]；如果在0～1的范围内用分段的连续函数表达$\varphi(\lambda)$，则判断压杆类型的步骤是不可少的。

参考文献

[17.1] 吴荣礼，"几种常用截面压杆设计的一种简便方法"，《力学与实践》，4(1981)。

[17.2] 陈云惠，"型钢截面压杆设计的简化"，《华侨大学学报》，1(1984)。

[17.3] 周宝焜，"压杆设计的直接法"，《福建农学院学报》，1(1985)。

[17.4] 高宝珍，"压杆截面设计的图解法"，《力学与实践》，6(1985)。

[17.5] 刘大泉、老亮，"也谈压杆设计问题"，《国防科学技术大学论文报告资料》92-1027，1992。

[17.6] 任治章，"压杆稳定设计的直接法"，《力学与实践》，1(1993)。

十八、泊松比之争

泊松比是一个重要的弹性常数。谈到泊松比的研究历史，我们必须回顾一下工程力学史上一场长达46年(1833～1879)的学术争论。

1821年，纳维假定材料是由中心力互相吸引的分子所组成，首次用分子理论来研究各向同性弹性体的平衡问题。他所导出的基本方程中只有一个弹性常数 C，因此被称为"单常数"理论。1825年，柯西把纳维的理论推广到各向异性弹性体，其基本方程中有36个常数(但可简化到15个)。尽管进一步简化到各向同性弹性体时仍保有两个常数，但柯西认为纳维的单常数理论才是正确的。[18.1] 1829年，泊松用纳维-柯西方法讨论板的平衡问题时指出，各向同性弹性杆件受到单向拉伸，产生纵向应变 ε_x，同时会联带地产生横向收缩，此横向应变为 $-\nu\varepsilon_x$。他用分子理论证明 $\nu=\frac{1}{4}$。"泊松比"一词就是由此而来的。如果 $\nu=\frac{1}{4}$，受拉杆件的体积应变 $\frac{\Delta V}{V_0}$ 就应当是

$$\frac{\Delta V}{V_0}=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z=(1-2\times\frac{1}{4})\varepsilon_x=\frac{1}{2}\varepsilon_x \qquad (a)$$

而剪切弹性模量 G 就应当等于 $0.4E$（E 是拉伸弹性模量）。对处于三轴静压应力 p 作用下的材料，其体积应变则应为

$$\frac{\Delta V}{V_0}=3p(1-2\times\frac{1}{4})/E=1.5\frac{p}{E} \qquad (b)$$

1827年，泊松引证拉图尔(C. de Latour)的试验数据(拉图尔于 1828 年才正式发表)来证明ν确实等于1/4。拉图尔在一根两米长的玻璃管中穿入一根黄铜丝，并在注满水后使黄铜丝受拉。通过观测玻璃管中液面的变化来推算黄铜丝受拉后的体积变化，所得数据与式(a)一致。由此肯定了纳维-柯西-泊松的单常数理论。

1833年，格林(G. Green)研究电磁波在弹性介质表面上的反射与折射时，首次用能量法证明，各向同性弹性材料的应变能函数中应当包括两个弹性常数，而不是单常数。从而引起了与纳维-柯西-泊松学派的“泊松比之争”。纳维、柯西、泊松以及支持单常数理论的著名力学家拉梅(G. Lamé)，都是法国科学院院士。由于他们的威望，单常数理论得到当时的公认，也使许多人进行大量试验以验证泊松比等于1/4的理论结论。其中最著名的有下列一些人的试验。[18 2]

维尔泰姆(G. Wertheim)1848年向法国科学院提交了“关于匀质固体平衡的研究报告”。他用七种不同的办法测定弹性常数：1. 测量长毛细管受力之后的体积变化；2. 用卡尺直接测量受拉橡胶的泊松比；3. 用球形压电计研究固体材料的可压缩性；4. 比较圆形杆件纵向振动与扭转振动的频率；5. 测量水中的声速；6. 研究振动圆平板的节线位置；7. 观察纵向振动杆件的横向变形。维尔泰姆用三根黄铜管(长 1 m，内径 5 mm，壁厚分别为 1、2、3 mm)及五根长度和直径各不相同的玻璃管，在管内注满水后使管件受拉。用毛细管测定内腔体积的变化，用读数显微镜测定管件的

纵向变形。通过比较由变形测定值算出的体积变化（$\Delta V=\frac{1}{2}\varepsilon_x V_0$，取$\nu=\frac{1}{4}$）与毛细管测出的真实体积变化，他发现$\nu\approx 1/3$而不是1/4。他还重做了拉图尔的试验，发现拉图尔试验中的黄铜丝已经产生了永久变形；而在弹性范围内，用拉图尔法测出的ν也是1/3。为了不使试样产生永久变形，维尔泰姆采用方形截面橡胶杆作试样，用卡尺测定其尺寸的变化。结果证明：在小应变范围内（$\varepsilon_x<0.06$），大部分试验点分布在$\nu=\frac{1}{3}$附近；而对于有限应变范围（纵向应变ε_x已达到200%）ν与1/4的偏差更大。用现代橡胶弹性力学观点考察维尔泰姆当年的试验数据，表明$\nu\approx\frac{1}{2}$，即符合橡胶不可压缩性假设，说明他的试验数据是可靠的。维尔泰姆的其他几项试验结果也表明泊松比ν不是1/4，而比较接近于1/3。因此他建议把单常数理论中的泊松比值从1/4改为1/3，但同时他仍认为单常数理论本身是正确的。维尔泰姆是银行家的后裔，他把所继承的巨额财富和全部精力都投入到科学实验之中。但由于他的测试结果与主流派的理论结果不符，使他在学术上长期受到非难，感到心情抑郁。1861年在法国图尔旅游时，他从教堂塔顶跳下，自杀身亡[18,3]

1859年，基尔霍夫（G. R. Kirchhoff）设计了一种巧妙的弯扭试验装置，直接从受弯扭圆杆的挠度和扭角测试数据求出泊松比ν，避免了圆杆直径测量误差对ν值的影响。他测出三种钢杆的ν值分别为0.293、0.294、0.295，两种黄铜杆的ν值为0.385和0.387。尽管又一次证实了$\nu\neq 1/4$，但他

仍然相信七流派的单常数理论，而怀疑所用试样有各向异性，对自己正确的测试结果持保留态度。

1869年，科尔纽（M.A. Cornu）首次用光学干涉法独立地测定泊松比ν值。圣维南关于杆件弯曲的理论研究结果认为，纯弯曲梁两主曲率半径之比值等于泊松比。科尔纽以此作为依据，用透明玻璃制成纯弯曲梁，长度为120～200mm。在梁上表面中心处放置一小块平板玻璃片，用莱顿瓶放电引燃单色钠光（波长3830Å）以照明玻璃片。由于玻璃片与梁上表面间隙引起光程差，产生干涉条纹——共轭双曲线。双曲线渐近线与梁纵轴的夹角正切值为$\nu^{-\frac{1}{2}}$。他把条纹照片放大25倍测量夹角。对七种试样八次测量的泊松比平均值为0.237，并不是1/4。尽管如此，科尔纽还是认为他的试验证实了单常数理论。52年之后，杰索普（H. T. Jessop）于1921年重新考察了科尔纽的试验数据，发现其中五组试样的跨度与宽度之比不符合圣维南原理，数据无效。而两组有效数据的ν值为0.243和0.250。现代试验结果表明，玻璃的$\nu=0.250$，所以100多年前科尔纽的测试精度是相当高的。

1879年，马洛克（A.Mallock）独立地证明：当矩形板条的厚度小于宽度、两者又都远小于跨度时，在纯弯曲情况下，板条挠曲面的两个主曲率半径分别为R和$-\nu R$。他在金属板条上表面中心的一个圆周上钻四个小孔，在这些孔中嵌入四根直钢丝来显示曲率半径的变化，用显微镜测量四根钢丝顶点的位移，反推出ν值。用这种比较粗糙的办法，他测出一些材料的泊松比值为：钢0.253，黄铜0.325，铜0.348，铅0.375，锌板0.180，铸锌0.230，胶木0.389，象牙0.50，印度橡胶0.50，石腊0.50，硬纸板0.20，软木0.00，巴黎石膏0.181，……。马洛克从自己的试验数据出发，正确地指出

$\nu=\frac{1}{4}$的单常数理论不适用于弹性刚体，泊松比是独立的材料常数，建议把单常数理论送进历史博物馆，从而终止了长达46年的“泊松比之争”。

尽管已得出合理的实验数据，但却不敢否认错误的主流理论。这在工程力学史上是一次令人深思的教训。现代固体力学已承认各向同性线弹性体有两个独立的弹性常数，并且已测出大多数金属的泊松比$\nu\approx1/3$，$G\approx3E/8$，同时把纳维、柯西开创的解析法和格林开创的能量法并列为互补的两类基本方法。

然而，“泊松比之争”并没有就此告终，关于泊松比的另一项学术争论至今尚未了结，这就是对于各向同性线弹性材料泊松比下限的争论。经典的弹性固体力学已经严格证明：等温条件下各向同性线弹性材料泊松比ν的取值范围是

$$-1\leqslant\nu\leqslant\frac{1}{2} \tag{c}$$

其证明来自使应变能函数正定的充要条件$G>0$和$K>0$。这里G和K分别是材料的剪切弹性模量和体积弹性模量。[18,4]注意到$K=E/3(1-2\nu)$和$G=E/2(1+\nu)$，即可导出式(c)，因为其中拉伸弹性模量$E>0$。泊松比ν的上限$\frac{1}{2}$就是材料的不可压缩性条件。铅($\nu\approx0.44$)、镓($\nu=0.47$)、铊($\nu=0.45$)、橡胶($\nu\approx0.499$)等物质的泊松比均接近这个上限值。而ν的下限值是否应取为-1，则一直存在不同的看法。这是因为尽管理论上允许负泊松比的存在，然而多年来人们一直没有找到具有负泊松比的实际工程材料，只是发现了铍的$\nu\approx0.01$、软木的$\nu\approx0.00$。由于工程常识告诉人们，杆件受拉伸时不

会变粗，受压缩时也不可能变细，因此人们一直认为物理概念上可以接受的泊松比下限值应当是零。文献[18.5]第一版(1956)和第二版(1980)中，分别把ν的下限写成 -1 和 0，就反映了这种不同的看法。我们可以用K和G把泊松比表达为

$$\nu=\frac{3K-2G}{2(3K+G)} \tag{d}$$

其中K和G均为正值。因此，只要有某种材料，其体积弹性模量K小于剪切弹性模量G的2/3，由式(d)即可导出负泊松比。

1987年，文献[18.6]宣布研制出几种具有负泊松比的泡沫材料。为了说明泡沫材料产生负泊松比的机制，可以把泡沫结构理想化为一种以空间网格为骨架，其间充满空气的空间网格结构，如图18.1a所示。当各节点间的骨架均为直杆时，微元泡沫结构是正六面体，仍具有正泊松比(图18.1a)。然而，如果使骨架的每根直杆都变成向内弯折的杆件，微元泡沫结构就变成为一种内凹的多角体，如图18.1b所示。这种材料在z向受拉时，xOy平面上的内凹骨架会向外扩张(变粗)；而沿z向受压时，原来内凹的骨架会向内进一步收缩(变细)。所以这种内凹多角体泡沫材料具有负泊松比。1991年，文献[18.7]宣布：先前利用特殊工艺已经制造出三种这样的内凹多角体泡沫材料，其G为1.8K至12K，泊松比为-0.03至-0.39；新近又制造出了泊松比为-0.70的聚氨基甲酸酯泡沫材料。泡沫材料在宏观上是均匀、连续、各向同性、线性弹性的，但是它们产生负泊松比的变形机制涉及到材料的细观结构。也有人用杆系模型模拟了负泊松比效应，把它们解释为微元结构的各向异性效应。[18.8]我们知道，作为各向同性材料的金属，其微结构也呈现出各向异性，但具有非负泊松比。若改变金属的微结构，使它们成为内凹多角体泡沫

材料，则可得到负泊松比。例如，文献[18.7]报导，铜泡沫材料的$\nu = -0.39$。

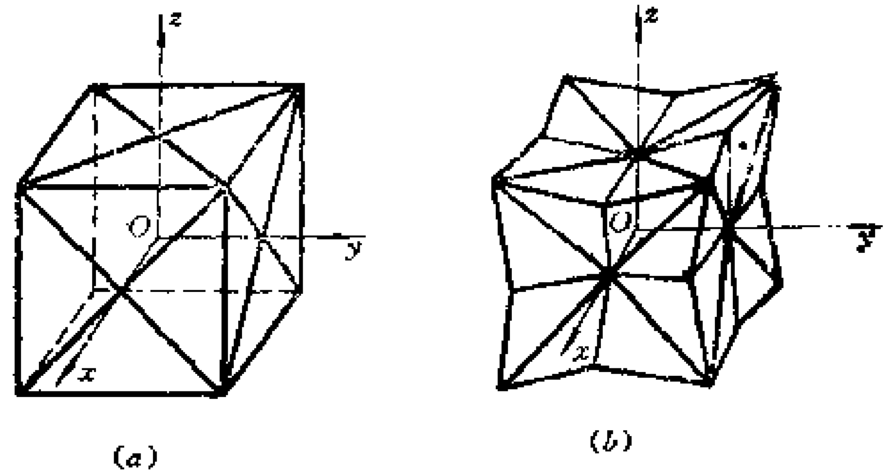


图 18.1

由此可见，正确的理论分析结果（预见ν可以是负值），尽管在一段时间内找不到实际的证据，然而随着实践的发展，最终还会证实科学的预见。150多年来两次“泊松比之争”从不同的两个方面告诉我们：要尊重理论，但不能迷信权威；要相信实验，也不能迷信实验。“泊松比之争”又一次说明了理论与实践之间的辩证关系。

参考文献

[18.1] S.P.Timoshenko,《材料力学史》,上海科学技术出版社，1961。

[18.2] J.F.Bell, *Mechanics of Solids*, Vol.I, *The Experimental Foundations of Solid Mechanics*, Spxinger-Verlag, 1984.

[18.3] 《中国大百科全书·力学》，中国大百科全书出版社，1985。

[18.4] Y.C.Fong, *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall Inc., 1965.

[18.5] 钱伟长、叶开沅，《弹性力学》，科学出版社，1956第1版，1980第2版。

[18.6] R.S.Lakes, E.A.Friis, *J.of Mat.*, Sci., 23, p.4406, 1987.

[18.7] R.S.Lakes, Trans.of ASME, *J.of Eng.Mat.and Tech.*, 113, p.148, 1991.

[18.8] J.L.Warren, *J.of Appl.Phys.*, p.7591, 1990.

[18.9] 郝松林，"负泊松比的分析与实验"，《力学与实践》，6(1992)。

十九、趣闻集锦及其他

这里将若干"超短篇"汇集在一起。其中有的并非"趣闻"，而应归入"其他"之列。

1．单凭经验还是经过计算

上一个世纪末，一位德国建筑师研究了大片地区的古埃及神庙遗迹。他测量了许多梁、板和下楣，并用近代的强度计算方法试作校核，发现所有这些构件的安全系数取值非常稳定，而且对天然石料这类性质变化较大的材料采用了不大的安全系数3～4。这是单凭经验决定还是作过某种计算呢？看来是个谜。

2．意外的收获

在铺设海底通讯电缆时，汤姆孙(W.Thomson)发现电缆的电阻值随海水的深度不同而变化。这个发现引起了他的兴趣。1856年，他对铜丝和铁丝进行拉伸试验，得知金属丝的应变与其电阻变化存在一定的函数关系，从而奠定了电阻应变计测量技术的理论基础。然而，实际应用则是本世纪的事情。1930年，卡尔松(R.W.Carlson)制造出非粘贴式应变计。1938年，西蒙斯(E.Simmons)和鲁奇(A.Ruge)制造出第一批实用的纸基丝绕式电阻应变计。40年代出现了由可调节的测量电桥和放大器组成的电阻应变仪，其灵敏度和精度都比早期使用的直流电桥和检流计大为提高。从此，

电测方法在工程技术领域和科学实验上获得广泛的应用。

3．你看这个试验有什么重要的缺点

由于船舶造得越来越大而且越来越轻，英国海军部决定对船舶强度进行一些实测试验。1903年，为此目的专门准备了一艘叫做“海狼”号的驱逐舰。试验时用应变计测量各部分的应力，不过没有一个应变计是放在船体任何重要的开孔附近。在船坞试验之后，这艘驱逐舰就出海去经受恶劣环境的考验。根据官方报导，“海狼”号是在“波涛汹涌，气势异常”的海面上航行的。从现在的观点看，读者能指出这个试验在设计安排上有什么严重的缺点吗？下面不妨提供一点历史资料作为参考。1898年，德国人基尔施(G.Kirsch)发表了单向均匀受拉的薄板上圆孔附近的应力分布，这大概是关于应力集中问题最早的理论研究。接着，俄国的科洛索夫（Г.В.Колосов，1910年）和英国的英格利斯(C.E.Inglis，1913年)也得出了椭圆孔附近应力集中的结果。此后，对应力集中问题的研究不断取得进展，并逐渐引起工程界的重视。

4．最早的材料力学实验课

1836～1871年，魏斯巴赫(J.L.Weisbach)在德国弗赖贝格矿业学院担任力学和机械设计方面的教授。他很重视工程力学的讲授方法。据1868年一份刊物介绍，魏斯巴赫建立了一个实验室，让学生通过实验来证实静力学、动力学和材料力学中的各项理论。当时的实验内容有固定的实心梁的弯曲、桁架模型、轴的扭转、扭转与弯曲的联合作用等。实验都是用木制模型来进行的。为便于测量，模型的尺寸设计得当，能在不大的载荷下产生相当大的变形。从此开创了学生通过实验来学习材料力学的有效途径。

5．一段涉及哲学问题的论述

《韩非子·亡征》说："木之折也必通蠹(dù，蛀蚀)，墙之坏也必通隙。然木虽蠹，无疾风不折；墙虽隙，无大雨不坏。"这段话既讨论了木折墙坏的原因，同时也涉及事物变化的内因和外因关系的哲学问题。《韩非子·解老》说："凡理者，方圆、短长、粗靡、坚脆之分也。"坚，即坚固、强度高。脆，即脆弱、容易破坏。区别物体的坚脆，用今天的话讲，就是研究物体的强度问题。所以说，《韩非子》已经把强度问题归入万物的"理"之中了。

6．注释的篇幅多于原著

我国一些古籍写得非常简略，后人注疏的篇幅往往多于原著。第一篇提到郑玄和贾公彦对《考工记》的注疏就是如此。这种"喧宾夺主"的现象在外国也不罕见。例如，圣维南为他的老师纳维所著有关材料力学的讲义《力学在结构和机械方面的应用》(1864年第三版)编辑时，圣维南加入了大量的注释和附篇，使纳维原来的内容仅占全书的1/10！在圣维南编译克莱布施所著的《固体弹性理论》(1883年出版)中，因为圣维南加了大量注释，结果它的字数比原著增加了三倍。我们可不能小看这些注释。郑玄关于力与变形成正比的记述就是写在《考工记》上的注释。圣维南在弹性力学方面发表过许多论文。其中最重要的一些研究成果，后来都以加注的形式编入上述两本书中。

7．弯矩图的作用

前面我们谈过纳维在材料力学方面的许多贡献。在他那本有关材料力学的讲义1826年第一版中，讨论了简支梁上承受一段均布载荷时的变形问题。当计算最大应力时，他认为最大弯矩发生在分布载荷的合力处。对于一般情况(分布载荷对

称时例外），这显然是错误的。铁木辛柯分析他出错的原因，认为是当时还未曾使用弯矩图和剪力图的缘故。我们知道，弯矩图最先出现在1856年雷布赫恩(G.Rebhann)《钢木结构理论》一书上；而便于确定最大弯矩位置的微分关系$Q=\frac{dM}{dx}$，则是施韦德勒尔(J.W.Schwedler)在1851年"桥梁的梁式理论"一文中首先给出的。

8. 有志者事竟成

1809年，法国科学院邀请德国科学家克拉尼(E.F.F.Chladni)作平板振动实验演述。他在板上铺一层细砂，使它显示出在各种振动形式下的节线，从而确定相应的频率。拿破仑观看了这次表演。在他的提议下，法国科学院悬奖征文，要求导出平板振动的数学理论，并与实验结果相比较。到1811年10月截止日期，只有年仅35岁的热曼小姐(S.Germain)一人应征。由于在一个积分式的计算中出了错误，她没有得到正确的方程式，因此未能获奖。当时评判人之一拉格朗日指出她的错误，改正后得出了所求方程一个满意的形式(后被称为热曼-拉格朗日方程)。其后法国科学院再次提出这个题目，截止日期为1813年10月。热曼再度应征。评判人要求用物理方法对基本假设作出证明，可惜她又一次失败了。于是法国科学院决定再延期一次。到1816年，虽然评判人对她的成果还不是非常满意，但他们没有过分吹毛求疵。在这第三次应征中热曼终于获奖了。

9. 开尔文纠正了圣维南的一个错误

非圆截面杆自由扭转时，在横截面上凸角顶端处剪应力必定等于零。这点读者想必还记得，并且很容易用剪应力互等定律予以证明。对于柱体扭转理论作出划时代贡献的圣维

南，不知何故曾认为，无论是凸角还是凹角，角顶处的剪应力都等于零。读者不妨试试，看用剪应力互等定律能否证明凹角处剪应力也必定等于零。到1867年，开尔文(即汤姆孙)通过理论推导证明，在凹角的顶端处，剪应力并非等于零，恰恰相反，剪应力达无穷大！从而纠正了圣维南的一个错误。但是，在实际上剪应力能达无穷大吗？也请读者考虑一下。

10. "阿波罗"工程中的一段插曲

第十篇介绍过，马略特在研究梁的强度问题时，由于推导公式中的失误$\left(少乘了\frac{1}{2}\right)$，遗憾地未能得出中性轴位置的正确结果。这里讲讲以希腊神话中太阳神阿波罗命名的登月工程的一段插曲：一个简单的代数错误差点延误了人类登月的进程。

美国在研究如何登月的问题时，曾提出过三个方案。第一个方案是"直接登月"，设想飞船在一个叫做"新星"的五级火箭推动下飞向月球，并利用飞船的动力装置进入月球轨道，然后靠制动火箭在月球上软着陆。第二个方案是"地球轨道交会"，需要两个"土星"5号三级火箭。第一个火箭将飞船和逃逸火箭等送上地球轨道，第二个火箭将推进剂送到地球轨道并与前者对接，然后飞向月球，其余的步骤与"直接登月"方案相同。第三个方案是"月球轨道交会"，用一个"土星"5号火箭，将"阿波罗"号飞船送到月球轨道上，然后分出一个小登月艺在月球上着陆。

经过一番激烈的竞争，对三个方案所作的分析和比较表明，虽然在性能上它们各有千秋，但从进程、费用和研制的简易性等方面来看，"月球轨道交会"方案占有优势。正当美国国家航空航天局选定它作为基本方案时，有人指出，根据

计算的数字，"月球轨道交会"方案在三个方案中是最危险的！

检查该方案的数字后发现，原来这是由于一个简单的代数错误引起的。纠正这个错误之后，正确的计算结果表明，"月球轨道交会"方案和"直接登月"方案的成功概率近似相等，而"地球轨道交会"方案的成功概率只有前两者的2/3；三个方案的安全概率是大致相等的。1969年7月20日，人类首次登上月球，"月球轨道交会"方案被实践一再证明是成功的。

我们不妨设想，如果那个简单的代数错误未被及时发现和纠正，并因此而放弃了"月球轨道交会"方案，那么，人类

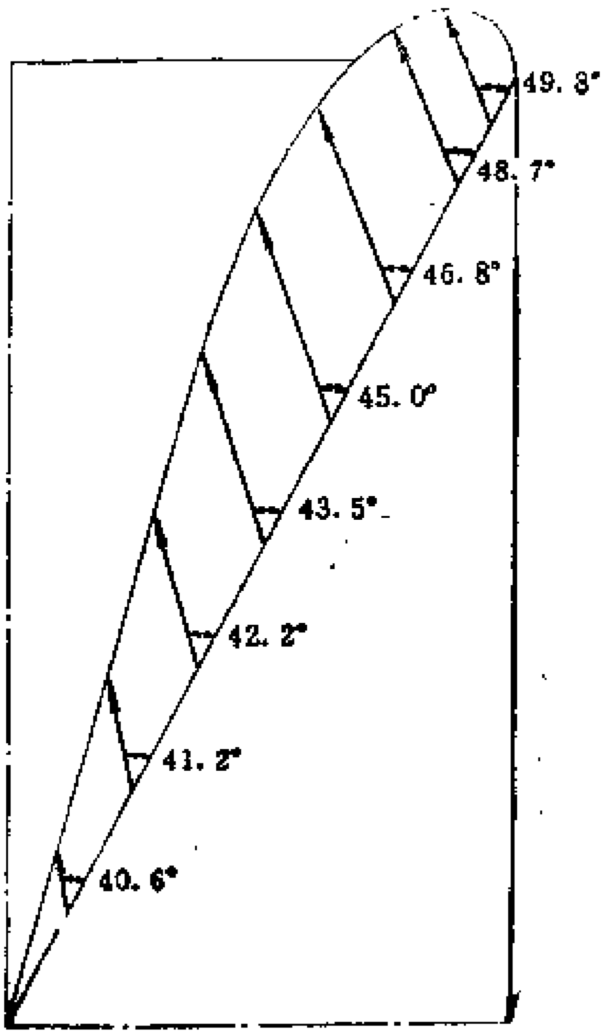


图 10.1

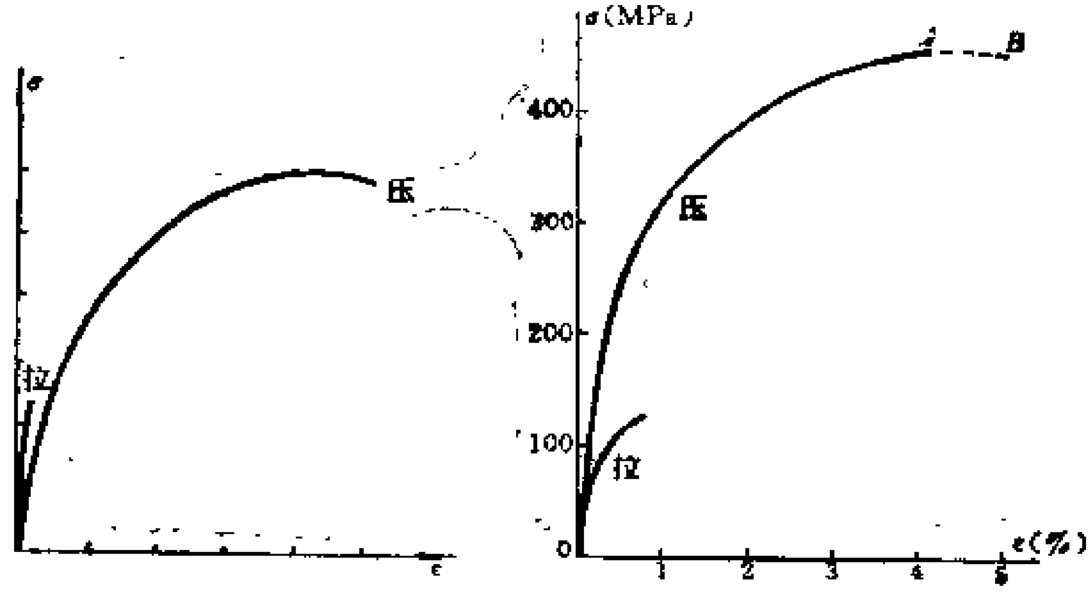
是否能在1969年7月20日登上月球呢？恐怕谁都难于作出令人信服的肯定的回答。

11. 失真的图形

读者或许已经注意到，一些书上给出的矩形截面杆扭转时横截面对角线上剪应力分布图，往往是不尽相同的。若以笔者所见中外各种有关力学书而论，这个图形绝大部分都是失真的。根据我们的计算，对于长短边之比等于2的矩形截面，正确的应力分布图如图19.1所示(图中只画出截面的1/4)。

12. 一个值得商榷的问题

关于灰铸铁拉伸应力应变曲线与压缩应力应变曲线相对比的图形，60年代以来至今国内一些材料力学书上采用了图19.2*a*所示的曲线。然而，根据我们的实验，则得出图19.2*b*所示的曲线，并与国外一些实验结果相符合。压缩试验采用长径比为5:1的试样，测量中段的变形。当加载至*A*点时(见图19.2*b*)，试样开始变弯，所以*AB*段用虚线表示。笔者



(*a*) (*b*)

图 19.2

认为，图19.2a是值得商榷的，因为拉伸的刚度似乎不会大于压缩的刚度。

参考文献

[19.1] S.P.铁木生可，《材料力学史》，上海科学技术出版社，1961。

[19.2] 《中国大百科全书·力学》，中国大百科全书出版社，1985。

[19.3] 张钟静，"阿波罗登月方案是如何决定的？"，《自然辩证法通讯》，6（1982）。

[19.4] 老亮，"矩形截面扭杆应力分布图之正误"，《力学与实践》，3(1981)；（并见同年第4期第78页中有关的更正）。

[19.5] 老亮、宋先郁，"灰铸铁应力-应变图中一个值得商榷的问题"，《国防科技大学学报》，3(1981)。

跋

为老亮主编《材料力学史漫话——从胡克定律的优先权讲起》一书而写

著者老亮和高等教育出版社编辑吴向要我为本书在付印出版前写几句，正好最近我读过老亮一篇新作(《力学与实践》1993年第3期)，介绍《天工开物》中反映出的我国古代对材料力学知识和认识，我就从此说起。

《天工开物》是明末宋应星关于手工业和农业百科全书式的科技著作，初版于1637年。《天工开物》和北宋沈括的《梦溪笔谈》所处的时代不同。在《梦溪笔谈》出版的时代，欧洲的科学技术水平比较低，《梦溪笔谈》虽然不是专门的科技专著，其中却记载了不少当时最先进的技术和科学见解。《天工开物》是技术性的专著，在写作风格上和《梦溪笔谈》一脉相承，主要靠文字描述来说明技术或科学见解，还有许多插图(如本书第一篇所引用的图1.2a)。然而《天工开物》在世界科技史上的地位，我认为就大不如《梦溪笔谈》了。也许是巧合，《天工开物》出版的第二年(1638年)，在欧洲，出版了伽利略的《关于力学和局部运动的两门新科学及数学证明》一书。① 这本书的内容用四天谈话的形式表达，第一天和第二天讲的是固体抗断裂阻力和聚合力，即有关杆的拉伸和梁的弯曲的讨论，后两天则讲运动，涉及匀加速运动和抛射体运动。读者可以从本书第九篇的介绍看到伽利略对材料力学的贡献。尽管他对

① 当时伽利略在监禁中，他因1632年《关于两种世界观的对话》一书有利于哥白尼学说而被判监禁终生。

梁材曲所用的假设今天看来有欠缺，但从科学方法说，他采用了实验再加数学分析这样的途径，开创了力学研究的新纪元。对比之下，在《天工开物》，以及宋应星同时代人的我国著作里，还只看到一些思辨式的讨论。应该说，这种思辨在中国古代工程技术应用方面，起过十分积极的作用。但科学要进步，就必须把思辨上升到逻辑思维。我们还注意到，伽利略提出了加速度的概念。有了加速度，动力学才能建立在科学的基础上。在我国传统文献里，却始终没有提出加速度的概念(详见戴念祖《中国古代力学史》，1988年，河北教育出版社)。不妨说，宋应星的《天工开物》反映了中国传统科学方法的终结，而伽利略的《两门新科学》则是近代西方科学方法的开始。只有在19世纪中叶牛顿力学由欧洲传入中国后，中国力学才逐渐跟上世界的潮流。欧洲的科学继承了古希腊的传统，那里有阿基米德的静力学、欧几里德的几何、亚里士多德的逻辑学。我国和古希腊对应的是百家争鸣的春秋时代，但即使是墨子有关力学、光学、逻辑的论点，在现代科学里，很难再找到它们的地位。在一些现代西方科学著作里，却逐渐加重对诸如《老子》、《周易》中的那些哲理的引用，认为它们可以弥补思想方法上的某些缺陷。我国古代科技曾相当长时期地居于世界前列(本书介绍的郑玄、贾公彦注疏是新发掘出的一例)。为什么近代自然科学并没有在中国产生?这是中外科技史学家所关心的一个重要课题，也是读者看完本书后不妨思索的问题。

材料力学是工程教育中一门重要课程。它通过概念怎样提出，问题怎样解决，结论在工程技术里又是怎样应用等具体内容，让学生初步体会科学和技术的彼此依赖关系。有些年长的技术人员回顾说，他们对要重视理论和科学方法的启蒙，

是从材料力学课程里得到的。无论读者将来或现在从事的是工程技术工作，还是基础科学研究，对上面这一问题的思索，也会有助于工作途径的选择。

高等教育出版社出版的《力学纵横丛书》里，贾书惠编的《从猫下落谈起》一书打响了头炮。现在又有了老亮这本纵横古今中外、饶有兴味的小册子。高等教育出版社出版的这一丛书让青年大学生在认真学习课内教学内容之余，宽松地浏览力学的全景，增长知识，且在方法论方面有所启迪。《力学纵横丛书》在对年青一代进行力学教育方面，做了一件有意义的好事。我衷心祝愿它今后不断有新的进展。

朱照宣

1993年3 月于北京大学力学系